DREAM's livsforløbsmodel - Model og algoritme

Peter Stephensen, DREAM

19. September 2009, version 1.01

1 Indledning

DREAM har påbegyndt et forskningsprojekt finansieret af EPRN-netværkert med titlen "Livsforløbsanalyse for karakteristiske rationelle husholdninger under usikkerhed".

Projektbeskrivelse findes på http://web.econ.ku.dk/epru/PeterStephensen.Livsforløbsanalyse.pdf

Dette er første udkast til livsforløbsmodellen og dens løsning. Arbejdsmarkedspension er ikke introduceret i denne version.

2 Model

Vi ønsker at beskrive en husholdning hvis løbende indkomst og dødstidspunkt er stokastisk, som har nytte af arv og som potentielt er kreditrationeret. Ved en given alder t, hvor husholdningen kender realiseret indkomst y_t og initial finansiel formue A_{t-1}, skal forbruget c_t vælges givet den usikre fremtid (vi vil senere specificere denne usikkerhed). Generelt skal der finde en sammenhæng (den såkaldte policy-funktion) $c_t = \varphi\left(A_{t-1}, y_t, t\right)$ som for alle t løser problemet:

$$\max_{\varphi()} E_t \left[\sum_{s=t}^{T} \left((1-\mu_s) \frac{c_s^{1-\rho}}{1-\rho} + \mu_s \omega \frac{(a + I_s(A_{s-1}))^{1-\rho}}{1-\rho} \right) \frac{\beta_{s-1}}{\beta_{t-1}} \right] \tag{1}$$

$$\begin{aligned} s.t. \qquad A_s + c_s &= \Phi_s(A_{s-1}, y_s), \; s \geq t \\ A_T &= 0 \\ A_{t-1} &= \overline{A}_{t-1}, \; B_{t-1} = \overline{B}_{t-1} \\ A_s &\geq A_{min}, \; s \geq t \end{aligned}$$

hvor $E_t[]$ er forventningsoperatoren givet den tilgængelige information ved alder t, ω angiver den vægt husholdningen tillægger arv, μ_s er sandsynlighdeden for at dø som s-årig, T er den maksimale levealder[1] og $I_s(A_{s-1})$ er en funktion der angiver sammenhængen mellem formuer og arv. I sin simpleste form vil det gælder at $I_s(A_{s-1}) = A_{s-1}$ som udtryk for at den finansielle formue overtages direkte af arvingerne. Parameteren a er medtaget for at gøre arv til et luksus-gode, således at ingen arv teoretisk set er muligt. Parameteren ρ er udtryk for den relative risikoaversions[2]. Størrelsen β_t er tilbagediskonteringsfaktoren. I det simple tilfælde antages det typisk at

$$\beta_t = \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^t$$

hvor θ er tilbagediskonteringsraten. Risiko for død er inddrages ved at antage at

$$\beta_t = \prod_{s=1}^{t} \frac{1-\mu_s}{1+\theta}$$

hvor μ_t er dødssandsynligheden ved alder t.

Budgetrestriktionen er defineret ud fra cash-on-hand-funktionen $\Phi_s(A_{s-1}, y_s)$. I det simpleste tilfælde gælder det at

$$\Phi_s(A_{s-1}, y_s) = (1+r) A_{s-1} + y_s$$

hvor rA_{s-1} er kapitalindkomst og y_s er løbende indkomst ved alder s. I vores tilfælde er cash-on-hand-funktionen en kompliceret lovgivningstung sag. Det er derfor rart at behandle den som en black-box. Vi vil i det følgende antage at den er differentiabel og monotont voksende i A_{t-1}. Det antages at $\Phi_s(A_{s-1}, y_s)$ har en veldefineret invers $A_{s-1} = \Phi_s^{-1}(x, B_{s-1}, y_s)$ med hensyn til den finansielle formue, som løsning til

$$\Phi_s(A_{s-1}, B_{s-1}, y_s) = x$$

[1] Det antages at $\mu_T = 1$

[2] $1/\rho$ kan ligeledes fortolkes som den intertemporale substitutionselasticitet. Det antages ofte at $\rho = 2$.

Parameren A_{min} angiver kreditrestriktionen. Denne restriktion kan slås fra ved at sætte $A_{min} = -\infty$.

Det kan vises at en løsning til problemet (1) overholder betingelsen (se appendiks A):

$$\begin{aligned} c_t^{-\rho} &= \frac{1}{1+\theta}(\mu_{t+1}\omega\frac{I'_{t+1}(A_t)}{(a+I_{t+1}(A_t))^{\rho}} \\ &+ (1-\mu_{t+1}) E_t\left[\Phi'_{t+1}(A_t, y_{t+1}) c_{t+1}^{-\rho}\right]) \end{aligned} \tag{2}$$

3 Algoritme

Algoritmen hvormed problemes løses er inspireret af Christopher Carroll's relativt nye Endogen-Grid-metode (EG-metode)(Correll (2005, 2009); Barillas and Fernández-Villaverde (2006)).

Lad os først definere et formue-grid. Der er J^A punkter i dette grid. Et punkt i grid'et er givet ved $j \in \{1, ..., J^A\}$. Formuen i det givne punkt er givet ved $A(j)$. Alle disse værdier fastlægges på forhånd. Det gælder per definition at $A(1) = A_{min}$. Det antages at $A(j) < A(j+1)$.

Antag den løbende indkomst y_t er givet ved:

$$y_t = G_t P_t T_t$$

hvor G_t er en deterministisk aldersprofil, P_t er en permanent indkomstkomponent og T_t er en transitorisk indkomstkomponent. På samme måde som ovenfor defineres grids $P(j),\ j \in \{1, ..., J^P\}$ og $T(j),\ j \in \{1, ..., J^T\}$. Lad $\pi^P_{t,i,j},\ i, j \in \{1, ..., J^P\}$ være sandsynligheden for at husholdningen modtager den permanente indkomst $P(j)$ ved alder t givet at husholdningen i sidste periode modtog indkomsten $P(i)$. For den transitoriske indkomst defineres sandsynlighedsfordelingen $\pi^T_{t,j},\ j \in \{1, ..., J^T\}$.

Definer

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_t(j_A, j_P, j_T) &\equiv \Phi_t(A(j_A), G_t P(j_P) T(j_T)) \\ \hat{I}_t(j_A) &\equiv I_t(A(j_A)) \\ \hat{I}'_t(j_A) &\equiv I'_t(A(j_A)) \end{aligned}$$

og definer den diskrete policy-function

$$c_t = \hat{\varphi}_t(j_A, j_P, j_T) \equiv \varphi(A(j_A), G_t P(j_P) T(j_T), t)$$

I sidste alder T vil det oplagt gælde at

$$\hat{\varphi}_T(j_A, j_P, j_T) = \hat{\Phi}_T(j_A, j_P, j_T)$$

på grund af restriktionen $A_T = 0$. Antag nu at vi kender $\hat{\varphi}_{t+1}$ og skal beregne $\hat{\varphi}_t$. Vi tager udgangspunkt i euler-ligningen (2). Vi vil gerne sikre os at:

$$\begin{aligned}\varphi(A_{t-1}, y_t, t)^{-\rho} &= \frac{1}{1+\theta}(\mu_{t+1}\omega\frac{I'_{t+1}(A_t)}{(a+I_{t+1}(A_t))^{\rho}} \\ &+ (1-\mu_{t+1}) E_t\left[\Phi'_{t+1}(A_t, y_{t+1})\varphi(A_t, y_{t+1}, t+1)^{-\rho}\right])\end{aligned}$$

Hvis vi antager at indkomstenkomponenterne ligger på deres respektive grid's - dvs. der findes $j_P \in \{1, ..., J^P\}$ således at $P_t = P(j_P)$ og $j_T \in \{1, ..., J^T\}$ således at $T_t = T(j_T)$, da kan de diskrete sandsynlighedersfordelinger inddrages

$$\begin{aligned}\varphi(A_{t-1}, y_t, t)^{-\rho} &= \frac{1}{1+\theta}(\mu_{t+1}\omega\frac{I'_{t+1}(A_t)}{(a+I_{t+1}(A_t))^{\rho}} \\ &+ (1-\mu_{t+1})\sum_{i=1}^{J^P}\sum_{j=1}^{J^T}\pi^P_{t+1,j_P,i}\pi^T_{t+1,j}\Phi'_{t+1}(A_t, y_{t+1})\varphi(A_t, y_{t+1}, t+1)^{-\rho})\end{aligned}$$

hvor

$$y_{t+1} = G_{t+1}P(i)T(j)$$

Før EG-metoden søgte man typisk at løse denne ligning for givne værdier af (A_{t-1}, y_t). Det nye ved EG-metoden er at der i stedet tages udgangpunkt i givne værdier af (A_t, y_t). Antag (A_t, P_t) ligger på deres respektive grid's:

$$(A_t, P_t) = (A(j_A), P(j_P))$$

Definer $\overline{c}_t(j_A, j_P)$ ved

$$\begin{aligned}\overline{c}_t(j_A, j_P)^{-\rho} &\equiv \frac{1}{1+\theta}(\mu_{t+1}\omega\frac{\hat{I}'_{t+1}(j_A)}{\left(a+\hat{I}_{t+1}(j_A)\right)^{\rho}} \\ &+ (1-\mu_{t+1})\sum_{i=1}^{J^P}\sum_{j=1}^{J^T}\pi^P_{t+1,j_P,i}\pi^T_{t+1,j}\hat{\Phi}'_{t+1}(j_A, i, j)\hat{\varphi}_{t+1}(j_A, i, j)^{-\rho})\end{aligned}$$

Ved at benytte budgetrestriktionen kan A_{t-1} beregnes

$$\overline{A}_{t-1}(j_A, j_P, j_T) \equiv \Phi_t^{-1}(A_t + \overline{c}_t(j_A, j_P), G_t P(j_P) T(j_T))$$

Det vil da oplagt gælde at

$$\overline{c}_t\left(j_A, j_P\right) = \varphi\left(\overline{A}_{t-1}\left(j_A, j_P, j_T\right), G_t P\left(j_P\right) T\left(j_T\right), t\right)$$

således at vi har fundet punkter på policy-funktionen. Vi har imidlertid et problem: $\overline{A}_{t-1}\left(j_A, j_P, j_T\right)$ vil typisk ikke ligge på formue-grid'et. Det dur ikke, idet vi da ikke kan genbruge vores metode til at beregne $\hat{\varphi}_{t-1}$ ud fra $\hat{\varphi}_t$. Vores startantagelse var jo netop at begge variable lå på deres grids.

Løsningen på problemet er at approximere policy-funktionen netop i grid-punkterne. Antag for givne j_P og j_T at $\overline{c}_t\left(j_A, j_P\right)$ og $\overline{A}_{t-1}\left(j_A, j_P, j_T\right)$ er beregnet i alle formue-grid-punkterne. Værdierne af forbruget interpoleres i formue-gridpunkterne på følgende måde. Hvis f.eks.

$$\overline{A}_{t-1}\left(j_A, j_P, j_T\right) < A\left(i\right) \leq \overline{A}_{t-1}\left(j_A + 1, j_P, j_T\right)$$

for et eller andet $i \in \left\{1, ..., J^A\right\}$, da defineres det at

$$\hat{\varphi}_t\left(i, j_P, j_T\right) = \overline{c}_t\left(j_A, j_P\right) + \frac{A\left(i\right) - \overline{A}_{t-1}\left(j_A, j_P, j_T\right)}{\overline{A}_{t-1}\left(j_A + 1, j_P, j_T\right) - \overline{A}_{t-1}\left(j_A, j_P, j_T\right)}\left(\overline{c}_t\left(j_A + 1, j_P\right) - \overline{c}_t\left(j_A, j_P\right)\right)$$

Hvis $\overline{A}_{t-1}\left(j_A, j_P, j_T\right) < A_{min}$ (dvs. kreditrestiktionen overtrædes) beregnes det forbrug der netop stemmer overens med en overholdelse af kreditrestriktionen:

$$\hat{\varphi}_t\left(1, j_P, j_T\right) = \hat{\Phi}_t\left(1, j_P, j_T\right) - A\left(j_A\right)$$

Litteratur

Carroll, C.D., 2005, The Method of Endogenous Gridpoints for Solving Dynamic Stochastic Optimization Problems, Manuscript, Johns Hopkins University

Carroll, C.D., 2009, Lecture Notes On Solution Methods for Microeconomic Dynamic Stochastic Optimization Problems, Manuscript, Johns Hopkins University

Barillas, F. and Fernández-Villaverde, J., 2006, A generalization of the endogenous grid method, Pages 2698-2712, Journal of Economic Dynamics and Control, Volume 31, Issue 8

A Beregning af Euler-ligning

I dette appendiks udregnes løsningen til problem (1).

Definer værdi-funktionen:

$$\begin{aligned}
V_t(A_{t-1}) &= max\, E_t\left[\sum_{s=t}^{T}\left((1-\mu_s)\frac{c_s^{1-\rho}}{1-\rho}+\mu_s\omega\frac{(a+I_s(A_{s-1}))^{1-\rho}}{1-\rho}\right)\frac{\beta_{s-1}}{\beta_{t-1}}\right] \\
&= max\, E_t[(1-\mu_t)\frac{c_t^{1-\rho}}{1-\rho}+\mu_t\omega\frac{(a+I_t(A_{t-1}))^{1-\rho}}{1-\rho} \\
&\quad +\frac{\beta_t}{\beta_{t-1}}\sum_{s=t+1}^{T}\left((1-\mu_s)\frac{c_s^{1-\rho}}{1-\rho}+\mu_s\omega\frac{(a+I_s(A_{s-1}))^{1-\rho}}{1-\rho}\right)\frac{\beta_s}{\beta_t}] \\
&= max\left\{(1-\mu_t)\frac{c_t^{1-\rho}}{1-\rho}+\mu_t\omega\frac{(a+I_t(A_{t-1}))^{1-\rho}}{1-\rho}+\frac{\beta_t}{\beta_{t-1}}E_t\left[V_{t+1}(A_t)\right]\right\} \\
&= max\left\{(1-\mu_t)\frac{c_t^{1-\rho}}{1-\rho}+\mu_t\omega\frac{(a+I_t(A_{t-1}))^{1-\rho}}{1-\rho}+\frac{\beta_t}{\beta_{t-1}}E_t\left[V_{t+1}(\Phi_t(A_{t-1},y_t)-c_t)\right]\right\}
\end{aligned}$$

For at maksimere differentieres det indre af {} mht. c_t. Det giver

$$(1-\mu_t)\,c_t^{-\rho}-\frac{\beta_t}{\beta_{t-1}}E_t\left[V_{t+1}'(A_t)\right]=0$$

eller

$$(1-\mu_t)\,c_t^{-\rho}=\frac{\beta_t}{\beta_{t-1}}E_t\left[V_{t+1}'(A_t)\right]$$

For at komme videre skal vi beregne værdifunktionens 1. afledede. I bedste konvolut-stil udnyttes at vi har differentieret med hensyn til c_t:

$$\begin{aligned}
V_t'(A_{t-1}) &= \frac{dc_t}{dA_{t-1}}\cdot 0+\mu_t\omega\frac{I_t'(A_{t-1})}{(a+I_t(A_{t-1}))^{\rho}}+\Phi_t'(A_{t-1},y_t)\frac{\beta_t}{\beta_{t-1}}E_t\left[V_{t+1}'(A_t)\right] \\
&= \mu_t\omega\frac{I_t'(A_{t-1})}{(a+I_t(A_{t-1}))^{\rho}}+(1-\mu_t)\,\Phi_t'(A_{t-1},j_t)\,c_t^{-\rho}
\end{aligned}$$

Dvs

$$(1-\mu_t)\,c_t^{-\rho}=\frac{\beta_t}{\beta_{t-1}}E_t\left[\mu_{t+1}\omega\frac{I_{t+1}'(A_t)}{(a+I_{t+1}(A_t))^{\rho}}+(1-\mu_{t+1})\,\Phi_{t+1}'(A_t,y_{t+1})\,c_{t+1}^{-\rho}\right]$$

eller

$$c_t^{-\rho} = \frac{1}{1+\theta} E_t \left[\mu_{t+1} \omega \frac{I'_{t+1}(A_t)}{(a + I_{t+1}(A_t))^{\rho}} + (1 - \mu_{t+1}) \Phi'_{t+1}(A_t, y_{t+1}) c_{t+1}^{-\rho} \right]$$

Idet A_t ikke afhænger af den usikre indkomst y_{t+1}, gælder det at

$$c_t^{-\rho} = \frac{1}{1+\theta} \left(\mu_{t+1} \omega \frac{I'_{t+1}(A_t)}{(a + I_{t+1}(A_t))^{\rho}} + (1 - \mu_{t+1}) E_t \left[\Phi'_{t+1}(A_t, y_{t+1}) c_{t+1}^{-\rho} \right] \right)$$