Egenskaber ved specificerede funktioner
Cobb Douglas, CES og Nested CES

Lars Haagen Pedersen
Økonomisk Institut
Københavns Universitet

2. version
22. februar 1998

1. Cobb-Douglas funktionen

Den n dimensionelle Cobb-Douglas funktion kan skrives som

$$U = U(C_1, C_2, ..., C_n) = A \prod_{i=1}^{n} C_i^{\alpha_i} = A\left(C_1^{\alpha_1} C_2^{\alpha_2} \cdots C_n^{\alpha_n}\right),$$

hvor $A > 0$ er en konstant og $\alpha_i > 0$ for alle i.

Ofte vil vi betragte specialtilfældet, hvor funktionen har konstant skalaafkast. Dvs. situationen hvor vi antager at

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = 1 \tag{1.1}$$

1.1. Den indirekte nyttefunktion

Når man anvender specielle funktionsformer i praksis kan det ofte være en fordel at arbejde med nytten som funktion af priser og indkomst i stedet for direkte som funktion af det købte varebundt. For at danne den indirekte nyttefunktion findes efterspørgslen efter hver af de varer, som indgår som argument i nyttefunktionen. Disse efterspørgselsfunktioner indsættes i nyttefunktionen, som herefter vil være en funktion af priser og indkomst. Den indirekte nyttefunktion findes på følgende måde

$$\max \ A \prod_{i=1}^{n} C_i^{\alpha_i}$$

under bibetingelse af

$$\sum_{i=1}^{n} p_i C_i = M, \tag{1.2}$$

hvor M er forbrugerens budget.

Første ordens betingelserne er givet ved

$$\alpha_i C_i^{-1} A \prod_{i=1}^{n} C_i^{\alpha_i} = \lambda p_i, \quad \forall i$$

Hver af disse første ordens betingelser multipliceres med det respektive C_i og der summeres over første ordens betingelserne for alle n varer. Dette giver

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} p_i C_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A \prod_{i=1}^{n} C_i^{\alpha_i}$$

Heraf følger at

$$\lambda = \frac{A \prod_{i=1}^{n} C_i^{\alpha_i}}{M}$$

Indsættes dette i første ordens betingelsen for vare i fås

$$\alpha_i C_i^{-1} A \prod_{i=1}^{n} C_i^{\alpha_i} = \frac{A \prod_{i=1}^{n} C_i^{\alpha_i}}{M} p_i, \quad \forall i$$

$$C_i = C_i\left(p_1, ..., p_n, M\right) = \alpha_i \frac{M}{p_i}, \quad \forall i \tag{1.3}$$

Hermed har vi fundet efterpørgselsfunktionen efter vare i. Denne efterspørgselsfunktion kaldes ofte den marshallske efterspørgselsfunktion. Det bemærkes, at efterspørgslen efter vare i alene er en funktion af prisen på vare i og forbrugerens budget. Priser på andre varer spiller ingen rolle for efterspørgslen. Resultatet er det velkendte, at der bruges en fast andel af indkomsten på forbrug af den enkelte vare. Andelen er lig med den eksponenten til den pågældende vare i Cobb-Douglas nytte funktionen.

Tilbage er der således blot at indsætte disse efterspørgselsfunktioner i den oprindelige nyttefunktion. Herved fås

$$S\left(p_1, p_2, ..., p_n, M\right) = A \prod_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \frac{M}{p_i}\right)^{\alpha_i} = AM \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i} \tag{1.4}$$

Det ses heraf, at vi får, at den indirekte nyttefunktion er homogen af 0. grad i indkomst og priser. (Prøv selv at vis det).

Man kan naturligvis også kommer fra den indirekte nytte funktion til den marshallske efterspørgselsfunktion. Denne sammenhæng er kendt som **Roy's identitet** (se f.eks. Kreps (1990) side 57)

$$C_i\left(p_1, ..., p_n, M\right) = \frac{-\partial S\left(p_1, ..., p_n, M\right)}{\partial p_i} / \frac{\partial S\left(p_1, ..., p_n, M\right)}{\partial M} \tag{1.5}$$

Det er let at tjekke at det passer i Cobb-Douglas tilfældet.

1.2. Prisindeks

Når nyttefunktionen (eller produktionsfunktionen) har konstant skalaafkast, har det mening at definere et prisindeks, der knyttes til funktionen. **Generelt defineres indekset som den minimale omkostning pr. enhed**. Hvis der er tale om en nyttefunktion måler indekset altså de minimale omkostninger pr. nytte-enhed. Tilsvarende gælder, at hvis der er tale om en produktionsfunktion måler indekset de minimale omkostninger pr. produceret enhed.[1]

Det er klart, at det kun har mening at definere indeks, hvis funktionen har konstant skalaafkast. I modsat fald vil omkostningerne pr. enhed jo ikke være uafhængige af niveauet for C.

[1] Bemærk, at prisindekset defineret på denne måde knytter sig til den enkelte forbrugers nyttefunktion. I en model, hvor forbrugerne har forskellige nyttefunktioner, vil der derfor ikke være et "forbrugerprisindeks", men derimod ét for hver type nyttefunktion i modellen.

I Cobb-Douglas tilfældet er det lettest at finde indekset ved direkte indsættelse i den indirekte nytte funktion, som vi udledte i afsnittet ovenfor.

Vi anvender, at det følger af definitionen, at prisindekset måler, hvilken indkomst, der er tilstrækkelig til at sikre nytten 1, ved prisvektoren $(p_1, p_2, ..., p_n)$. Indsat i nyttefunktionen fås

$$1 = AM \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i}$$

$$P = P(p_1, p_2, ..., p_n) = \frac{1}{A} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \tag{1.6}$$

Det ses heraf, at vi kan skrive den indirekte nyttefunktion, der hører til Cobb-Douglas funktionen, som

$$S(p_1, p_2, ..., p_n, M) = A \prod_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \frac{M}{p_i}\right)^{\alpha_i} = \frac{M}{P}$$

Den indirekte nyttefunktion er derfor realindkomsten vurderet ved det relevante prisindeks.

I tilfældet med $n = 2$ fås, at prisindekset bliver

$$P(p_1, p_2) = \frac{1}{A} \left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{p_2}{1-\alpha_1}\right)^{1-\alpha_1}$$

idet der jo gælder at $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$

1.3. Elasticiteter

I empiriske undersøgelser vil man ofte søge at fastlægge egenskaberne ved nyttefunktionen ud fra forskellige elasticitetsegenskaber. I det følgende går vi den anden vej og ser hvilke elasticitetsegenskaber, der følger af, at vi har valgt Cobb-Douglas funktionen som nyttefunktion.

Først defineres **egenpriselasticiteten som: Den procentvise stigning i efterspørgslen ved en procentvis stigning i prisen på varen selv.** Egenpriselasticiteten opgøres tit numerisk, da den jo er negativ. Med symboler fås idet vi anvender (1.3)

$$\frac{\frac{\partial C_i}{C_i}}{\frac{\partial p_i}{p_i}} = \frac{\partial C_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{C_i} = -\alpha_i \frac{M}{p_i^2} \frac{p_i}{C_i} = -\alpha_i \frac{M}{p_i^2} \frac{p_i^2}{\alpha_i M} = -1$$

Dernæst defineres **indkomstelasticiteten som: Den procentvise stigning i efterspørgslen ved en procentvis stigning i indkomsten**

$$\frac{\frac{\partial C_i}{C_i}}{\frac{\partial M}{M}} = \frac{\partial C_i}{\partial M} \frac{M}{C_i} = \alpha_i \frac{1}{p_i} \frac{M}{C_i} = \alpha_i \frac{M}{p_i} \frac{p_i}{\alpha_i M} = 1$$

Krydspriselasticiteten mellem vare i og vare j defineres som: Den procentvise stigning i efterspørgslen efter vare i ved en procentvis stigning i prisen på vare

j.

$$\frac{\frac{\partial C_i}{C_i}}{\frac{\partial p_j}{p_j}} = \frac{\partial C_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{C_i} = 0$$

1.4. Den hicksianske efterspørgsel

Man vil ofte i den teoretiske litteratur støde på begreber som kompenserede priselasticiteter. Disse baserer sig på såkaldte hicksianske efterspørgselskurver. Der kan måske være grund til at repetere disse. **Definer udgiftsfunktionen som den minimale udgift forbundet med at opnå et givet nytteniveau.** Udgiftsfunktionen er derfor løsningen til følgende problem

$$\min \sum_{i=1}^{n} p_i C_i = (p_1 C_1 + p_2 C_2 + \cdots + p_n C_n)$$

under bibetingelserne

$$U(C_1, ..., C_n) = A \prod_{i=1}^{n} C_i^{\alpha_i} = 1$$

Første ordens betingelser

$$p_i - \lambda \alpha_i C_i^{-1} A \prod_{i=1}^{n} C_i^{\alpha_i} = 0, \quad \forall i$$

eller skrevet på den generelle form

$$p_i - \lambda U'_{C_i}(C_1, C_2, ..., C_n) = 0 \quad \forall i$$

Multipliceres begge sider af første ordens betingelserne med C_i og summeres herefter over alle første ordens betingelser fås

$$\sum_{i=1}^{n} p_i C_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} U'_{C_i}(C_1, C_2, ..., C_n) C_i = \lambda U(C_1, C_2, ..., C_n)$$

hvor sidste lighedstegn følger af Eulers sætning og det faktum, at $U-$funktionen er homogen af 1.grad. Løses ligningen for λ fås

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i C_i}{U(C_1, C_2, ..., C_n)} \equiv P$$

Det ses umiddelbart af formlen, at λ er omkostningerne i optimum pr. enhed af U. Da disse omkosninger er minimale, er λ netop prisindekset $P(p_1, p_2, ..., p_n)$ som det blev defineret ovenfor. I Cobb-Douglas tilfældet er dette indeks udledt i ovenstående afsnit og givet ved (1.6). Bruger vi dette kan vi skrive udgiftsfunktionen som

$$e(p_1, p_2, ..., p_n, u) = P(p_1, p_2, ..., p_n) u = u \frac{1}{A} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}$$

hvor u er nytteniveauet.

Den hicksianske efterspørgselsfunktion efter vare i kan findes den partielle afledede af udgiftsfunktionen med hensyn til prisen på vare i. Dette kaldes ofte for **Shephards lemma**. Vi beviser det ikke her, da det er bevist i "Noter til International Integration", som ligeledes er pensum.

$$h_i(p_1, p_2, ..., p_n, u) = \frac{\partial e(p_1, p_2, ..., p_n, u)}{\partial p_i} \tag{1.7}$$

Bemærk den principielle forskel mellem den hicksianske efterspørgsel (1.7) og den almindelige eller Marshallske efterspørgsel givet i relation (1.3). I den hicksianske efterspørgsel findes efterspørgslen givet priserne og nytteniveauet. Dvs. hvis vi betragter ændringen i den hicksianske efterspørgsel som følge af en prisstigning på f.eks. vare 1, så antager vi, at forbrugeren har samme nytte, u før og efter prisstigningen. Da vi betragter en prisstigning på en vare, som forbrugeren efterspørger, vil der gælde, at for given indkomst vil forbrugeren ikke være i stand til at opnå nytten u efter prisstigningen, hvis u er det nytteniveau, som forbrugeren havde inden prisstigningen. **Når vi betragter den hicksianske efterspørgsel gælder der derfor, at vi antager at forbrugeren bliver kompenseret for prisstigningen gennem en stigning i indkomsten**, således at forbrugeren i optimimum med de nye priser netop vil opnå nytten u. **Ved den almindelige (eller marshallske) efterspørgsel gælder omvendt, at vi holder indkomsten fast**, således at forbrugeren ikke vil kunne nå det oprindelige nytteniveau efter prisstigningen.

1.5. Kompenserede elasticiteter

I Cobb-Douglas tilfældet bliver den hicksianske efterspørgsel givet ved

$$h_i(p_1, p_2, ..., p_n, u) = u\alpha_i p_i^{-1} \frac{1}{A} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} = \alpha_i p_i^{-1} e(p_1, p_2, ..., p_n, u)$$

Den kompenserede egenpriselasticitet kan nu defineres som: Den procentvise ændring i den hicksianske efterspørgsel efter vare i som følge af en procentvis stigning i prisen på vare i. Den kompenserede egenpriselasticitet findes som

$$\frac{\frac{\partial h_i}{h_i}}{\frac{\partial p_i}{p_i}} = \frac{\partial h_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{h_i} = u\alpha_i(\alpha_i - 1) p_i^{-2} \frac{1}{A} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \frac{p_i}{h_i} = (\alpha_i - 1)$$

Det indses let, at den kompenserede egenpriselasticitet er numerisk mindre end den ukompenserede. Dette skyldes, at den ukompenserede findes ved at betragte en procentvis ændring i prisen på vare i for fastholdt indkomstniveau, mens den kompenserede elasticitet findes for fastholdt nytteniveau u. Dette indebærer, at forbrugeren efter prisstigningen må have en større indkomst for at kunne købe et varebundt, der stiller ham/hende mindst lige så godt som før prisstigningen. Den øgede indkomst giver anledning til, at faldet i efterspørgslen efter vare i ikke bliver så stort som uden kompensationen.

Bemærk, at forskellen netop er α_i, der er den andel af det samlede budget, som forbrugeren bruger på vare nr. i. Dette giver god intuitiv mening: Jo større end andel af budgettet som forbrugeren bruger på vare nr. i, jo mere "rammes" vedkommende af en prisstigning på vare i. Behovet for at kompesere forbrugeren med øget indkomst er derfor større.

Tilsvarende kan vi finde den kompenserede krydspriselasticitet mellem vare i og vare j. Denne er defineret som: **Den procentvise ændring i den hicksianske efterspørgsel efter vare i som følge af en procentvis stigning i vare** j.

$$\frac{\frac{\partial h_i}{h_i}}{\frac{\partial p_j}{p_j}} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{h_i} = U\alpha_i\alpha_j p_i^{-1}p_j^{-1}\frac{1}{A}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}\frac{p_j}{h_i} = \alpha_j$$

Også i dette tilfælde er den kompenserede elasticitet numerisk større end den ukompenserede. Forklaringen er naturligvis den samme som ovenfor. Kompensationen af forbrugeren betyder, at efterspørgslen efter alle varer stiger relativt til situationen uden kompensation. Vi kan komme lidt tættere på en fortolkning ved at betragte den såkalde Slutsky dekomponering.

1.6. Slutsky-ligningen

I dette afsnit vil vi betragte sammenhængen mellem kompenserede og ukompenserede elasticiteter lidt nærmere. Vi tager udgangspunkt i den såkaldte Slutsky-ligning (enhver lidt avanceret bog i mikroøkonomi beviser denne relation. Kreps (1990) gør det på side 59 og skriver endda "the formal proof is relatively painless"). Ligningen kan skrives

$$\frac{\partial C_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - \frac{\partial C_i}{\partial M}C_j, \quad \forall i,j \tag{1.8}$$

Ligningen siger, at ændringen i den marshallske efterspørgsel kan deles op i en substitutionseffekt og en indkomsteffekt. Substitutionseffekten måles ved ændringen i den hicksianske efterspørgsel.

Vi bruger nu Slutsky ligningen til at opskrive sammenhængen mellem elasticitetsudtrykkene. Som eksempel betragter vi krydspriselasticiteten. Ved anvendelse af definitionen og Slutsky-ligningen (1.8) fås

$$\frac{\partial C_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{C_i} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{C_i} - \frac{\partial C_i}{\partial M}C_j\frac{p_j}{C_i} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{h_i} - \frac{\partial C_i/C_i}{\partial M/\left(p_jC_j\right)} \tag{1.9}$$

Det ses, at den ukompenserede krydspriselasticitet er lig med den kompenserede krydspriselasticitet minus den procentvise ændring i forbruget af vare i som følge af den procentvise ændringen i udgiften til vare j.

I Cobb-Douglas tilfælde kan det sidste led udregnes til

$$\frac{\partial C_i/C_i}{\partial M/\left(p_jC_j\right)} = \frac{\alpha_i}{p_i}\frac{p_jC_j}{C_i} = \frac{\alpha_i}{p_i}\frac{p_j\frac{\alpha_j}{p_j}M}{\frac{\alpha_i}{p_i}M} = \alpha_j$$

hvilket netop er en bekræftigelse af den forskel vi så ovenfor. Pointen er altså, at når vi betragter elasticiteteter kan effekten hidrørende fra indkomsteffekt-leddet findes som udgiftsandelen på den vare der stiger i pris.

2. CES-funktionen

De meget restriktive elasticitetsegenskaber, der følger af valget af Cobb-Douglas funktionen kan - og vil ganske ofte - føles for snærende ved anvendelse af funktionsformen til konkrete empiriske formål. Man får derfor ofte brug for funktionsformer, der giver større frihedsgrader med hensyn til elasticiteterne. Som et første bud på en en sådan funktion betragtes CES funktionen. Denne kan skrives som

$$\tilde{U} = \tilde{U}(C_1, ..., C_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i C_i^{\frac{E-1}{E}} \right)^{\frac{E}{(E-1)}}$$

CES står som bekendt for Constant Elasticity of Subastitution. Lad os derfor starte med at definere og finde substitutionselasticiteten. Først skal vi bruge det marginale substitutionsforhold, MRS. Definitionen af det marginale substitutionsforhold mellem vare i og vare j kan skrives

$$MRS_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}(C_1, ..., C_n)/\partial C_i}{\partial \tilde{U}(C_1, ..., C_n)/\partial C_j} \tag{2.1}$$

Indsættes de afledte af CES funktionen i definitionen af det marginale substitutionsforhold (2.1) fås

$$MRS_{ij} = \frac{\left(\frac{E}{E-1}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i C_i^{\frac{E-1}{E}} \right)^{\frac{1}{E-1}} \left(\frac{E-1}{E}\right) \beta_i C_i^{\frac{-1}{E}}}{\left(\frac{E}{E-1}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i C_i^{\frac{E-1}{E}} \right)^{\frac{1}{E-1}} \left(\frac{E-1}{E}\right) \beta_j C_j^{\frac{-1}{E}}} = \frac{\beta_i}{\beta_j} \left(\frac{C_i}{C_j} \right)^{\frac{-1}{E}}$$

Defineres nu substitutionselasticiteten som

$$\zeta_{ij} = \frac{-\partial \left(\frac{C_i}{C_j}\right)}{\partial \left(MRS_{ij}\right)} \frac{\left(MRS_{ij}\right)}{\left(\frac{C_i}{C_j}\right)} \tag{2.2}$$

og indsættes udtrykket for det marginale substitutionsforhold (2.1) heri fås

$$\zeta_{ij} = \frac{-\partial \left(\frac{C_i}{C_j}\right)}{\partial \left(MRS_{ij}\right)} \frac{MRS_{ij}}{\left(\frac{C_i}{C_j}\right)} = -\left(\frac{-1}{E} \frac{\beta_i}{\beta_j} x^{\frac{-1}{E}-1} \right)^{-1} \left(\frac{\frac{\beta_i}{\beta_j} x^{\frac{-1}{E}}}{x} \right) = E$$

idet vi definerer

$$x = \frac{C_i}{C_j}$$

Det ses, at substitutionselasticiteten mellem vilkårlige par af varer alle er lig med konstanten E. Dvs. substitutionselasticiteten er både uafhængig af forbruget af de to varer, der betragtes, og af hvilke to varer, der betragtes.

Eksempel: Substitutionselasticiteten i en Cobb-Douglas funktion

For at finde substitutionselasticiteten findes først den marginale substitutionsrate. Denne er i Cobb-Douglas tilfældet

$$MRS_{ij} = \frac{\alpha_i C_i^{-1} A \prod_{i=1}^{n} C_i^{\alpha_i}}{\alpha_j C_j^{-1} A \prod_{i=1}^{n} C_i^{\alpha_i}} = \frac{\alpha_i C_j}{\alpha_j C_i}$$

Indsættes dette i definitionen på substitutionselasticiteten fås

$$\zeta_{ij} = \frac{-\partial\left(\frac{C_i}{C_j}\right)}{\partial\left(MRS_{ij}\right)} \frac{MRS_{ij}}{\left(\frac{C_i}{C_j}\right)} = \frac{-\partial\left(\frac{C_i}{C_j}\right)}{\partial\left(\frac{\alpha_i C_j}{\alpha_j C_i}\right)} \frac{\frac{\alpha_i C_j}{\alpha_j C_i}}{\left(\frac{C_i}{C_j}\right)} =$$

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\left(\frac{C_i}{C_j}\right)^2 \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\left(\frac{C_j}{C_i}\right)^2 = 1$$

Dvs. en Cobb-Douglas funktion er en CES funktion med den specielle egenskab at sustitutionselasticiteten er 1.

2.1. Hvad måler substitutionselasticiteten

Lad nyttefunktionen være en CES funktion med to varer som argumenter. En indifferenskurve defineres som de kombinationer af de to varer der giver samme nytte. Punkter på en given indifferenskurve opfylder derfor

$$\tilde{U}(C_1, C_2) = \left(\sum_{i=1}^{2} \beta_i C_i^{\frac{E-1}{E}}\right)^{\frac{E}{(E-1)}} = \left(\beta_1 (C_1)^{\frac{E-1}{E}} + \beta_2 (C_2)^{\frac{E-1}{E}}\right)^{\frac{E}{E-1}} = k$$

hvor k er en (tilfældig) konstant. Totaldifferentieres udtrykket fås

$$\left(\beta_1 (C_1)^{\frac{-1}{E}} dC_1 + \beta_2 (C_2)^{\frac{-1}{E}} dC_2\right)\left(\beta_1 (C_1)^{\frac{E-1}{E}} + \beta_2 (C_2)^{\frac{E-1}{E}}\right)^{\frac{1}{E-1}} = 0$$

hvilket kan reduceres til

$$\frac{dC_2}{dC_1} = \frac{-\beta_1}{\beta_2}\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{-1}{E}}$$

hvilket jo (ikke overraskende) er det ovenfor udledte udtryk for det marginale substitutionsforhold. Vi har altså det velkendte resultat at MRS er hældningen på indifferenskurven.

Vi anvender herefter, at i optimum må hældningen på indiffernskurven være lig med prisforholdet og får derfor

$$MRS_{12} = \frac{-p_1}{p_2} \tag{2.3}$$

Indsættes dette i definitionen på substitutionselasticiteten, fås

$$\zeta_{ij} = \frac{-\partial\left(\frac{C_i}{C_j}\right)}{\partial\left(\frac{-p_i}{p_j}\right)} \frac{\frac{-p_i}{p_j}}{\frac{C_i}{C_j}}$$

Substitutionselasticiten måler således den procentvise ændring i det relative forbrug af to varer som følge af en procentvis ændring i varernes relative priser.

Forudsætningen, om at substitutionselasticiteten er konstant, betyder, at den procentvise ændring i det relative forbrug af de to varer som følge af en procentvis ændring i de relative priser på varerne er lig konstanten E og derfor uafhængig af det absolutte niveau for priser og forbrug. Endvidere er substitutionselasticiteten også uafhængig af prisudviklingen på andre varer. Endelig bemærkes, at disse forhold gælder for alle mulige kombinationer af varer.

2.2. Substitutionselasticitetens størrelse

Størrelsen af substitutionselasticiteten påvirker indifferenskurvernes form. Vi betragter et par specialtilfælde: Hvis $\zeta_{ij} \to 0$, da er vare i og vare j (perfekte) komplementære goder. Hvis omvendt $\zeta_{ij} \to \infty$, da er vare i og vare j perfekte substitutter. I sidste tilfælde er forbrugerne altså helt ligeglade med, om de får vare i eller vare j. Da vi antager, at ζ_{ij} er den samme for alle kombinationer af varer, gælder det, at i tilfældet hvor varerne er perfekte substitutter, vil forbrugerne kun købe den billigste.

2.3. Prisindeks

Ligesom i tilfældet med Cobb-Douglas funktionen ønsker vi at udlede egenskaber som prisindeks, efterspørgselsfunktioner, indrekte nyttefunktion og elasticitetsegenskaber hvis nyttefunktionen har CES.

I dette tilfælde er det smart at starte med at finde udgiftsfunktionen. Dvs. løse nedenstående minimeringsproblem. Metoden er identisk med den vi anvendte i Cobb-Douglas tilfældet (afsnit 1.4)

$$\begin{aligned} & \min_{c_1,\ldots,c_n} \quad p_1C_1 + p_2C_2 + \ldots + p_nC_n \\ & \text{under bibetingelsen} \\ 1 \quad = \quad & \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i C_i^{\frac{E-1}{E}}\right)^{\frac{E}{(E-1)}} = \tilde{U}\left(C_1, \ldots, C_n\right) \end{aligned}$$

hvor $p_1, \ldots, p_n$ er priserne på vare 1 til n.

Første ordens betingelserne bliver

$$p_i = \lambda \tilde{U}'_{C_i}\left(C_1, \ldots, C_n\right), \quad \forall i \tag{2.4}$$

Anvendes herefter, at $\tilde{U}\left(C_1, \ldots, C_n\right) -$ funktionen er homogen af 1. grad kan vi bruge Eulers sætning, der i denne situation siger

$$\tilde{U}\left(C_1, \ldots, C_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{U}'_{C_i}\left(C_1, \ldots, C_n\right) C_i \tag{2.5}$$

Ved at multiplicere første ordens betingelsen for vare nr. i med C_i og foretage samme operation med de øvrige første ordens betingelser og herefter summere over disse fås

$$\sum_{i=1}^{n} p_i C_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \tilde{U}'_{C_i}\left(C_1, ..., C_n\right) C_i = \lambda \tilde{U}\left(C_1, ..., C_n\right)$$

hvor sidste lighedstegn følger af (2.5). Divideres igennem med $\tilde{U}\left(C_1, ..., C_n\right)$ fås

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i C_i}{\tilde{U}\left(C_1, ..., C_n\right)} \equiv \tilde{P} \tag{2.6}$$

Det ses, at λ er omkostningen pr. nytteenhed givet, at forbrugerne har omkostningsminimeret. Men dette er jo netop definitionen på prisindekset, $\tilde{P}$.

Indsættes dette i første ordens betingelserne (2.4) fås

$$\frac{p_i}{\tilde{P}} = \tilde{U}'_{C_i}\left(C_1, ..., C_n\right)$$

Anvendes yderligere, at $\tilde{U}\left(C_1, ..., C_n\right)$ er en CES-funktion fås

$$\begin{aligned}
\frac{p_i}{\tilde{P}} &= \beta_i \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i C_i^{\frac{E-1}{E}}\right)^{\frac{1}{E-1}} C_i^{\frac{-1}{E}} \quad \Rightarrow \\
\left(\frac{p_i}{\tilde{P}}\right)^E &= \beta_i^E \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i C_i^{\frac{E-1}{E}}\right)^{\frac{E}{E-1}} C_i^{-1} \quad \Rightarrow \\
\left(\frac{p_i}{\tilde{P}}\right)^E &= \frac{\beta_i^E \tilde{U}\left(C_1, ..., C_n\right)}{C_i} \quad \Rightarrow \\
C_i &= \left(\frac{p_i}{\tilde{P}}\right)^{-E} \beta_i^E \tilde{U}\left(C_1, ..., C_n\right)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Det ses, at hvis forbrugeren omkostningsminimerer (hvilket jo er en nødvendig forudsætning for at nyttemaksimere), kan forbrugerens efterspørgsel efter vare nr. i skrives som en funktion af prisen på vare nr. i, det generelle prisindeks og den samlede nytte $\tilde{U}$.

Indsættes efterspørgselsudtrykket for vare nr. i, dvs. relation (2.7) i definitionen af prisindekset (2.6) fås

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i C_i &\equiv \tilde{P}\tilde{U}\left(C_1, ..., C_n\right) \quad \Rightarrow \\
\sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{p_i}{\tilde{P}}\right)^{-E} \beta_i^E \tilde{U}\left(C_1, ..., C_n\right) &\equiv \tilde{P}\tilde{U}\left(C_1, ..., C_n\right) \quad \Rightarrow \\
\sum_{i=1}^{n} p_i \left(p_i\right)^{-E} \beta_i^E &\equiv \tilde{P}^{1-E} \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\tilde{P} = \tilde{P}(p_1, ..., p_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{1}{(1-E)}} \tag{2.8}$$

Hermed har vi fundet prisindekset. Bemærk, at hvis forbrugeren kender alle priserne på varerne kan prisindekset bestemmes. Endelig bemærkes, at indekset er homogent af 1. grad i priserne.

2.4. Den indirekte nyttefunktion og de marshallske efterspørgselsfunktioner

Det er nu lige til at anvende, at prisindekset pr. definition måler (minimums)omkostningen ved en nytte-enhed. Det følger heraf, at det antal nytte-enheder, man kan købe for budgettet maksimalt er lig med budgettet delt med prisindekset. Heraf følger, at det netop er definitionen på den indirekte nyttefunktion, der altså er givet som

$$\tilde{S}\left(p_1, ..., p_n, M\right) = \frac{M}{\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{1}{(1-E)}}}$$

Bruger vi herefter Roy's identitet, jf. (1.5), kan den marshallske efterspørgsel findes som

$$C_i\left(p_1, ..., p_n, M\right) = \frac{-\partial \tilde{S}\left(p_1, ..., p_n, M\right)}{\partial p_i} / \frac{\partial \tilde{S}\left(p_1, ..., p_n, M\right)}{\partial M} =$$

$$\beta_i^E p_i^{-E} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{E}{(1-E)}} \frac{M}{\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{2}{(1-E)}}} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{1}{(1-E)}} \Rightarrow$$

$$C_i\left(p_1, ..., p_n, M\right) = \beta_i^E \left(\frac{p_i}{\tilde{P}}\right)^{-E} \frac{M}{\tilde{P}}$$

Det ses, at i modsætning til tilfældet med Cobb-Douglas funktionen afhænger efterspørgselsfunktionen efter vare i af priserne på alle varer i økonomien. Hertil kommer at efterspørgslen afhænger af budgettet og af substitutionselasticiteten.

2.5. Elasticitetsudtryk

Vi starter med at betragte egenpriselasticiteten

$$\frac{\frac{\partial C_i}{C_i}}{\frac{\partial p_i}{p_i}} = \frac{\partial C_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{C_i} = \left(-E\beta_i^E M \tilde{P}^{E-1} p_i^{-E-1} + (E-1)\,\beta_i^E M \tilde{P}^{E-2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial p_i} p_i^{-E}\right) \frac{p_i}{C_i}$$

hvor

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial p_i} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{1}{(1-E)}}}{\partial p_i} = \beta_i^E p_i^{-E} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{E}{(1-E)}} = \beta_i^E p_i^{-E} \tilde{P}^E$$

Indsættes dette fås

$$\frac{\frac{\partial C_i}{C_i}}{\frac{\partial p_i}{p_i}} = \beta_i^E \frac{M}{\tilde{P}} \left(\frac{p_i}{\tilde{P}}\right)^{-E} \left(-E p_i^{-1} + (E-1)\,\beta_i^E p_i^{-E} \tilde{P}^{E-1}\right) \frac{p_i}{C_i}$$

$$= -E + (E-1)\,\beta_i^E \left(\frac{p_i}{\tilde{P}}\right)^{1-E}$$

hvor første led kan fortolkes som den direkte effekt via p_i mens andet led er et udtryk for at prisen på vare i også påvirker det samlede prisindeks, $\tilde{P}$, således at den relevante prisforvridning bliver mindre end den umiddelbare effekt på p_i. Også i dette tilfælde kan vi bruge fortolkningen med udgiftsandele. Det er jo klart at jo mere vægt forbrugeren lægger på forbruget af en given vare jo større effekt har ændringer i prisen på den givne vare på det prisindeks, der er relevant for forbrugeren. Lad os derfor definere udgiftsandelen til vare nr. i, som

$$e_i = \frac{p_i C_i}{M} = \frac{p_i \beta_i^E \left(\frac{p_i}{\tilde{P}}\right)^{-E} \frac{M}{\tilde{P}}}{M} = \beta_i^E \left(\frac{p_i}{\tilde{P}}\right)^{1-E} \tag{2.9}$$

Indsættes definitionen på udgiftsandelen i udtrykket for egenpriselasticiteten fås

$$\frac{\frac{\partial C_i}{C_i}}{\frac{\partial p_i}{p_i}} = -E + (E-1)\, e_i \tag{2.10}$$

Det ses umiddelbart, at egenpriselasticiteten kan skrives som summen af den direkte effekt på efterspørgslen af en stigning i p_i (denne elasticitet er $-E$) og den indirekte effekt via stigningen i prisindekset, hvor den sidste effekt altså kan skrives som udgiftsandelen af vare gange elasticiteten mht. prisindekset.

Krydspriselasticiteten kan findes som

$$\frac{\frac{\partial C_i}{C_i}}{\frac{\partial p_j}{p_j}} = \frac{\partial C_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{C_i} = \left((E-1)\, p_i^{-E} \beta_i^E M \tilde{P}^{E-2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial p_j}\right)$$

hvor

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial p_j} = \beta_j^E p_j^{-E} \tilde{P}^E$$

Indsættes fås

$$\frac{\frac{\partial C_i}{C_i}}{\frac{\partial p_j}{p_j}} = \left((E-1)\left(\frac{p_i}{\tilde{P}}\right)^{-E} \beta_i^E \frac{M}{\tilde{P}} \tilde{P}^{E-1} \beta_j^E p_j^{-E}\right) \frac{p_j}{C_i}$$

$$= (E-1)\, \tilde{P}^{E-1} \beta_j^E p_j^{1-E} = (E-1)\, \beta_j^E \left(\frac{p_j}{\tilde{P}}\right)^{1-E}$$

Også i dette udtryk indsættes definitionen på udgiftsandelen - men denne gang for vare j. Herved fås

$$\frac{\frac{\partial C_i}{C_i}}{\frac{\partial p_j}{p_j}} = (E-1)\, e_j$$

Det ses, at krydspriselasticiteten kan skrives som elasticiteten i efterspørgslen efter vare i mht. prisindekset multipliceret med udgiftsandelen til vare j.

Endelig kan vi finde indkomstelasticiteten. Denne er givet ved

$$\frac{\frac{\partial C_i}{C_i}}{\frac{\partial M}{M}} = \frac{\partial C_i}{\partial M}\frac{M}{C_i} = \left(\frac{p_i}{\tilde{P}}\right)^{-E} \beta_i^E \frac{1}{\tilde{P}} \frac{M}{C_i} = 1$$

Ligesom i Cobb Douglas tilfældet findes altså en indkomstelasticitet på 1.

2.6. Udgiftsfunktionen, den hicksianske efterspørgsel og den kompenserede elasticitet

Det er nu forholdsvis let at finde udgiftsfunktionen givet, at nyttefunktionen har CES. Denne defineres som

$$\tilde{e}\left(p_1,...,p_n,u\right)=\tilde{P}\left(p_1,...,p_n\right)u=\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{1}{(1-E)}}u$$

Heraf følger at den hicksianske efterspørgsel kan skrives som

$$\tilde{h}_i\left(p_1,...,p_n,u\right)=u\beta_i^E p_i^{-E}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{E}{(1-E)}}$$

Den kompenserede egenpriselasticitet bliver derfor

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial h_i}{h_i}}{\frac{\partial p_i}{p_i}} &= \left(-Eu\beta_i^E p_i^{-E-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{E}{(1-E)}}+Eu\beta_i^{2E}p_i^{-2E}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{2E-1}{(1-E)}}\right)\frac{p_i}{h_i}\\
&= Eu\beta_i^E p_i^{-E}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{E}{(1-E)}}\left(\beta_i^E p_i^{1-E}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{-1}-1\right)\frac{1}{h_i}\\
&= E\left(\frac{\beta_i^E p_i^{1-E}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)}-1\right)<0
\end{aligned}$$

Indsættes udtrykket for prisindekset (2.8) kan den kompenserede egenpriselasticitet skrives som

$$\frac{\frac{\partial h_i}{h_i}}{\frac{\partial p_i}{p_i}}=E\left(\left(\frac{\left(\beta_i^E p_i^{1-E}\right)^{\frac{1}{1-E}}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{1}{1-E}}}\right)^{1-E}-1\right)=E\left(\beta_i^E\left(\frac{p_i}{\tilde{P}}\right)^{1-E}-1\right)$$

Hvis vi yderligere indsætter udtrykket for udgiftsandelen (2.9) er det let, at genfinde samme struktur som i Cobb-Douglas tilfældet

$$\frac{\frac{\partial h_i}{h_i}}{\frac{\partial p_i}{p_i}}=E\left(e_i-1\right)$$

Det ses, således at den kompenserede egenpriselasticitet kan skrives som den direkte (eller umiddelbare) elasticitet i efterspørgslen som følge af en stigning i prisen p_i (denne er lig med $-E$) multipliceret med faktoren $(1-e_i)$. Dette var netop også tilfældet med Cobb-Douglas funktionen, idet det huskes, at den direkte elasticitet i efterspørgslen som følge af en stigning i prisen p_i i dette tilfælde er -1.

Den kompenserede krydspriselasticitet mellem vare i og vare j

$$\frac{\frac{\partial h_i}{h_i}}{\frac{\partial p_j}{p_j}}=\frac{\partial h_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{h_i}=E\tilde{U}\beta_i^E p_i^{-E}\beta_j^E p_j^{1-E}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)^{\frac{2E-1}{(1-E)}}\frac{1}{h_i}$$

$$= \frac{E\beta_j^E p_j^{1-E}}{\left(\sum_{i=1}^n \beta_i^E p_i^{(1-E)}\right)} = E\beta_j^E \left(\frac{p_j}{\tilde{P}}\right)^{1-E} > 0$$

Også i dette tilfælde kan vi indsætte udtrykket for udgiftsandelen (2.9) denne gang blot for vare j. Herved fås

$$\frac{\frac{\partial h_i}{h_i}}{\frac{\partial p_j}{p_j}} = Ee_j$$

som igen er analog med det udtryk vi fandt i Cobb-Douglas tilfældet.

3. Nestede CES funktioner

Ved sammenligning af de to foregående afsnit ses, at man ved at anvende CES funktioner i stedet for Cobb-Douglas funktioner opnår to ting, der er centrale, når man vil anvende funktionerne til at beskrive f.eks. forbrugsbeslutninger, som de observeres i virkeligheden. Ved anvendelse af CES funktioner opnås for det første, at **priserne på alle varer har indflydelse på efterspørgslen efter den enkelte vare**. (med Cobb-Douglas funktionen er det kun prisen på varen selv). For det andet opnås at **egenpriselasticiteten i efterspørgslen ikke er bundet til 1, men kan variere frit**. Der er imidlertid stadig (mindst) to punkter, der bør give anledning til overvejelser vedr. funktionsformen. Det første af disse er, at CES funktionen implicerer, at substitutionselasticiteten mellem vilkårlige par af varer er den samme. Det andet er det faktum, at indkomstelasticiteten for alle vare er 1.

I dette afsnit betragter vi en type funktioner, der er designet til at løse problemet med de ens substitutionselasticiteter. Funktionsformen kaldes nested CES-funktion, og er formentlig den mest udbredte funktionsform i anvendte generelle ligevægtsmodeller. Ideen er at opdele funktionens argumenter i par - mellem hvilke der er en given substitutionselasticitet. For et sådan par dannes en under-funktion, der er CES. Denne under-funktion kan derefter danne par med en anden under-funktion, således at der er en given substitutionselasticitet mellem de aggregater, der repræsenteres ved under-funktionerne. Det er ikke så indviklet som det lyder. Vi starter med at betragte den simplest mulige nestede CES-funktion. Den indeholder 3 varer og et nest (dvs. en under-funktion, der har CES).

3.1. CES funktioner med 1 nest

Betragt en funktion med 3 argumenter. Det kunne f.eks. være en produktionsfunktion med argumenterne kapital, arbejdskraft og materialer. Det vil for langt de fleste tilfælde være urealistisk at antage, at der er samme substitutionselasticitet mellem alle 3 argumenter. Vi kan derfor betragte 2 af disse, f.eks. kapital og arbejdskraft og danne en CES-funktion med en given substitutionselasticitet, σ_H af disse to input. Dette kan skrives

$$H(K,L) = \left(\beta_K K^{\frac{\sigma_H - 1}{\sigma_H}} + \beta_L L^{\frac{\sigma_H - 1}{\sigma_H}}\right)^{\frac{\sigma_H}{(\sigma_H - 1)}}$$

Herefter kan aggregatet mellem K og L, som vi har kaldt H parres med materiale inputtet, M i en ny CES funktion, med en substitutionselasticitet, σ_Y der afviger fra σ_H. Produktionsfunktionen kan derfor skrives som

$$Y(H,L) = \left(\beta_M M^{\frac{\sigma_Y - 1}{\sigma_Y}} + \beta_H H^{\frac{\sigma_Y - 1}{\sigma_Y}}\right)^{\frac{\sigma_Y}{(\sigma_Y - 1)}}$$

Eller

$$Y(K,L,M) = \left(\beta_M M^{\frac{\sigma_Y - 1}{\sigma_Y}} + \beta_H \left(\left(\beta_K K^{\frac{\sigma_H - 1}{\sigma_H}} + \beta_L L^{\frac{\sigma_H - 1}{\sigma_H}}\right)^{\frac{\sigma_H}{(\sigma_H - 1)}}\right)^{\frac{\sigma_Y - 1}{\sigma_Y}}\right)^{\frac{\sigma_Y}{(\sigma_Y - 1)}} \tag{3.1}$$

hvor vi blot har indsat udtrykket for H.

Af dette sidste udtryk ses næsten umiddelbart, at der kan være betragtelige overskuelighedsmæssige fordele ved at undlade at skrive funktionerne ud i de umiddelbare input, men i stedet anvende de aggregater, der fremkommer i hvert nest (dvs. i hver under-CES-funktion).

Det er samtidig klart, at det princip, som vi har anvendt til at konstruere (3.1), kan udvides i det uendelige, f.eks. kunne vi opfatte såvel M som K og L som aggregater og dermed tilføje yderligere nests i funktionen. Endvidere er det ikke nødvenligt, at der kun skal være to argumenter i hver under-CES-funktion. Der kunne f.eks. tænkes at være flere typer arbejdskraft, hvor substitutionselasticiteten mellem de enkelte typer er den samme. Aggregatet L kunne derfor være en CES-funktion med mere end to argumenter.

Nestede CES-funktioner giver derfor meget fleksibilitet med hensyn til substitutionselasticiteter. Et centralt spørgsmålet er imidlertid: Hvordan vælges, hvilke input-par der skal dannes? Hvorfor kunne vi ikke lige så godt parre materialer, M og arbejdskraft, L først og derefter parre aggregatet med K? Dette er empiriske spørgsmål. Man må undersøge hvilke par-dannelser, der ikke afvises af data.

I ADAM anvendes en produktionsfunktion, der foruden de 3 ovennævnte input også inkluderer energi, E. Thomsen (1994) undersøger hvilken nestningsstruktur, der ikke afvises af data. Han finder, at den bedste formulering er, at K og E bindes sammen i niveau 1. Herefter bindes $K - E$ aggregatet sammen med L i niveau 2. Endelig bindes $K - E - L$ aggregatet sammen med M i niveau 3.

I DREAM ser vi indtil videre bort fra energi og anvender en produktionsfunktion svarende til (3.1), hvor K er et aggregat sammensat af importerede og indenlandske varer, mens M har to nests: Et for offentlige og private materaleinputs og et for hhv. indenlandske og importerede private inputs.

Vi vender os herefter mod egenskaberne. For at bevare kontinuiteten i udledningerne vil vi i dette afsnit lade funktionen (3.1) repræsentere en nyttefunktion. Vi skriver den derfor som

$$\hat{U} = \hat{U}(c_1, c_2, c_3) = \left(\beta_1 (c_1)^{\frac{\sigma_U - 1}{\sigma_U}} + \beta_H \left(\left(\beta_2 (c_2)^{\frac{\sigma_H - 1}{\sigma_H}} + \beta_3 (c_3)^{\frac{\sigma_H - 1}{\sigma_H}}\right)^{\frac{\sigma_H}{(\sigma_H - 1)}}\right)^{\frac{\sigma_U - 1}{\sigma_U}}\right)^{\frac{\sigma_U}{(\sigma_U - 1)}}$$

hvor vi definerer

$$H\left(c_2, c_3\right) = \left(\beta_2\left(c_2\right)^{\frac{\sigma_H - 1}{\sigma_H}} + \beta_3\left(c_3\right)^{\frac{\sigma_H - 1}{\sigma_H}}\right)^{\frac{\sigma_H}{(\sigma_H - 1)}}$$

3.2. Prisindeks

Prisindekset knyttet til funktionen (3.1) er et CES prisindeks over priserne på input c_1 og H. Det har den generelle form som vi fandt i sidste afsnit, jf. (2.8). Prisindekset kan derfor skrives

$$P_U = \left(\beta_1^{\sigma_U} p_1^{(1-\sigma_U)} + \beta_H^{\sigma_U} P_H^{(1-\sigma_U)}\right)^{\frac{1}{(1-\sigma_U)}}$$

hvor P_H er prisindekset på aggregatet over c_2 og c_3. Dette indeks kan skrives

$$P_H = \left(\beta_2^{\sigma_H} p_2^{(1-\sigma_H)} + \beta_3^{\sigma_H} p_3^{(1-\sigma_H)}\right)^{\frac{1}{(1-\sigma_H)}}$$

Prisindekset svarende til funktionen $\hat{U}$, givet ved priserne på inputs kan således skrives som

$$P_U = \left(\beta_1^{\sigma_U} p_1^{(1-\sigma_U)} + \beta_H^{\sigma_U}\left(\left(\beta_2^{\sigma_H} p_2^{(1-\sigma_H)} + \beta_3^{\sigma_H} p_3^{(1-\sigma_H)}\right)^{\frac{1}{(1-\sigma_H)}}\right)^{(1-\sigma_U)}\right)^{\frac{1}{(1-\sigma_U)}}$$

3.3. Den indirekte nyttefunktion

Fra de ovenstående afsnit haves, at den indirekte nyttefunktion kan skrives som budgettet, M delt med det relevante prisindeks

$$\hat{S}\left(p_1, p_2, p_3, M\right) = \frac{M}{P_U} = \frac{M}{\left(\beta_1^{\sigma_U} p_1^{(1-\sigma_U)} + \beta_H^{\sigma_U} P_H^{(1-\sigma_U)}\right)^{\frac{1}{(1-\sigma_U)}}}$$

3.4. De marshallske efterspørgselsfunktioner

Ved anvendelse af Roy's identitet jf. (1.5) kan efterspørgselsfunktionerne findes som. Først vare 1:

$$c_1\left(p_1, P_H, M\right) = \frac{-\partial S\left(p_1, P_H, M\right)}{\partial p_1} / \frac{\partial S\left(p_1, P_H, M\right)}{\partial M} =$$

$$\frac{\frac{M}{\left(\beta_1^{\sigma_U} p_1^{1-\sigma_U} + \beta_H^{\sigma_U} P_H^{1-\sigma_U}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_U}}} \beta_1^{\sigma_U} \frac{p_1^{1-\sigma_U}}{p_1\left(\beta_1^{\sigma_U} p_1^{1-\sigma_U} + \beta_H^{\sigma_U} P_H^{1-\sigma_U}\right)}}{\frac{1}{\left(\beta_1^{\sigma_U} p_1^{1-\sigma_U} + \beta_H^{\sigma_U} P_H^{1-\sigma_U}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_U}}}} = \beta_1^{\sigma_U} M \frac{p_1^{-\sigma_U}}{\left(\beta_1^{\sigma_U} p_1^{1-\sigma_U} + \beta_H^{\sigma_U} P_H^{1-\sigma_U}\right)}$$

Hvoraf fås, at vi finder den sædvanlige CES-efterspørgselsfunktion

$$c_1\left(p_1, P_H, M\right) = \beta_1^{\sigma_U}\left(\frac{p_1}{P_U}\right)^{-\sigma_U} \frac{M}{P_U}$$

For vare 2 fås efter en del mellemregninger, der er gengivet i appendiks, at efterspørgslen kan skrives som

$$c_2\left(p_1, p_2, p_3, M\right) = \beta_2^{\sigma_H} \beta_H^{\sigma_U} \left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{-\sigma_H} \left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U} \frac{M}{P_U}$$

Bemærk systematikken. For vare 2, som er i det nederste nest, findes først prisforholdet $\left(\frac{p_2}{P_H}\right)$ opløftet til den relevante elasticitet i det nederste nest, σ_H. Dette multipliceres med den indirekte effekt, som prisindekset P_H har i det øverste nest, således at vi får prisforholdet $\left(\frac{P_H}{P_U}\right)$. Også dette prisforhold opløftes til den relevante elasticitet i det øverste nest, σ_U.

Det er nu let at regne ud hvordan efterspørgselsfunktionen efter vare 3 ser ud

$$c_3\left(p_1, p_2, p_3, M\right) = \beta_3^{\sigma_H} \beta_H^{\sigma_U} \left(\frac{p_3}{P_H}\right)^{-\sigma_H} \left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U} \frac{M}{P_U}$$

Systematikken skulle nu gerne være åbenlys. Hvis vi f.eks. antager, at vare 3 ikke er en egentlig vare men et aggregat bestående af vare $3a$ og vare $3b$, vil vi nu også være i stand til at opskrive efterspørgselsfunktionen efter vare $3a$

$$c_{3a}\left(p_1, p_2, p_{3a}, p_{3b}, M\right) = \beta_{3a}^{\sigma_3} \beta_3^{\sigma_H} \beta_H^{\sigma_U} \left(\frac{p_{3a}}{p_3}\right)^{-\sigma_3} \left(\frac{p_3}{P_H}\right)^{-\sigma_H} \left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U} \frac{M}{P_U}$$

hvor σ_3 er substitutionselasticiteten i det nest der indeholder varerne $3a$ og $3b$. I relationen ovenfor er p_3 det relevante prisindeks for aggregatet c_3. Endelig er β_{3a} vægtparameteren for vare $3a$ i det nederste nest.

Konklusionen er, at efterspørgselfunktioner for nestede CES funktioner er vanskelige at regne ud, men det er heller ikke nødvendigt, når man først har forstået systematikken.

3.5. Egenpriselasticitet

Egenpriselasticiteten for vare 1 svarer til den elasticitet vi regnede ud i foregående afsnit om CES funktionen i det vare 1 kun optræder i øverste nest. Vi vender os derfor med det samme mod egenpriselasticiteten for vare 2. Idet udledningerne er henlagt til appendiks fås

$$\frac{\frac{\partial c_2}{c_2}}{\frac{\partial p_2}{p_2}} = \frac{\partial c_2}{\partial p_2} \frac{p_2}{c_2} =$$

$$\left(-\sigma_H + \left(\sigma_H - \sigma_U\right) \beta_2^{\sigma_H} \left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H} + \left(\sigma_U - 1\right) \beta_2^{\sigma_H} \beta_H^{\sigma_U} \left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H} \left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U}\right)$$

Som sædvanlig derfineres udgiftsandelen

$$e_2 = \frac{p_2 c_2}{M} = \beta_2^{\sigma_H} \beta_H^{\sigma_U} \left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H} \left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U}$$

Tilsvarende kan vi definere udgiftsandelen af vare 2 ud af udgiften til aggregatet H

$$e_{2H} = \frac{p_2 c_2}{P_H H} = \frac{\beta_2^{\sigma_H} \beta_H^{\sigma_U} \left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H} \left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U} M}{\beta_H^{\sigma_U} \left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U} M} = \beta_2^{\sigma_H} \left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H}$$

Hermed har vi opnået at egenpriselasticiteten kan skrives som

$$\frac{\frac{\partial c_2}{c_2}}{\frac{\partial p_2}{p_2}} = -\sigma_H + (\sigma_H - \sigma_U) e_{2H} + (\sigma_U - 1) e_2$$

Ved sammenligning med den ikke nestede CES fuktion er det hermed relativt let at indse systematikken, således at man uden udregning kan danne udtrykket for egenpriselasticteten i en vilkårlig nested CES funktion.

3.6. Den kompenserede egenpriselasticitet

Vi bruger nu Slutsky-ligningen til at beregne den kompenserede eleasticitet. Fra (??) haves at den kompenserede elasticitet kan findes som

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{h_i} = \frac{\partial c_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{c_i} + \frac{\partial c_i}{\partial M} \frac{1}{p_i}$$

Vi skal således blot udregne sidste led

$$\frac{\partial c_2}{\partial M} p_2 = \beta_2^{\sigma_H} \beta_H^{\sigma_U} \left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{-\sigma_H} \left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U} \frac{p_2}{P_U} = \beta_2^{\sigma_H} \beta_H^{\sigma_U} \left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H} \left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U}$$

Tillægges dette (4.1) fås at den kompenserede egenpriselasticitet kan skrives som

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{h_i} = -\sigma_H + (\sigma_H - \sigma_U) \beta_2^{\sigma_H} \left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H} + \sigma_U \beta_2^{\sigma_H} \beta_H^{\sigma_U} \left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H} \left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U}$$

Indsættes igen de definerede udgiftsandele fås

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{h_i} = -\sigma_H + (\sigma_H - \sigma_U) e_{2H} + \sigma_U e_2$$

3.7. Krydspriselasticiteten mellem vare 2 og vare 3

Denne er defineret som

$$\frac{\frac{\partial c_2}{c_2}}{\frac{\partial p_3}{p_3}} = \frac{\partial c_2}{\partial p_3} \frac{p_3}{c_2} =$$

$$(\sigma_H - \sigma_U) \beta_3^{\sigma_H} \left(\frac{p_3}{P_H}\right)^{1-\sigma_H} + (\sigma_U - 1) \beta_3^{\sigma_H} \beta_H^{\sigma_U} \left(\frac{p_3}{P_H}\right)^{1-\sigma_H} \left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U} =$$

$$(\sigma_H - \sigma_U) e_{3H} + (\sigma_U - 1) e_3$$

hvor e_{3H} er udgiftsandelen for vare 3 ud af de samlede udgifter til H aggregatet. Tilsvarende er e_3 udgiftsandelen for vare 3 ud af den samlede efterspørgsel.

3.8. Den kompenserede krydspriselasticitet mellem vare 2 og 3

Her bruger vi igen den udledte sammenhæng mellem den kompenserede og den ukompenserede elasticitet jf. (1.9). I dette tilfælde fås

$$\frac{\partial h_2}{\partial p_3}\frac{p_3}{h_2} = \frac{\partial c_2}{\partial p_3}\frac{p_3}{c_2} + \frac{\partial c_2/c_2}{\partial M/(p_3 c_3)} \tag{3.2}$$

Vi finder derfor sidste led i udtrykket

$$\frac{\partial c_2/c_2}{\partial M/(p_3 c_3)} = \beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{-\sigma_H}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U}\frac{p_3}{P_U}\frac{\beta_3^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_3}{P_H}\right)^{-\sigma_H}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U}\frac{M}{P_U}}{\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{-\sigma_H}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U}\frac{M}{P_U}} =$$

$$\beta_3^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_3}{P_H}\right)^{1-\sigma_H}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U} = e_3$$

Bruges herefter udtrykket for den ukompenserede krydspriselasticitet og udtrykket (3.2) fås at den kompenserede krydspriselasticitet mellem vare 2 og vare 3 kan skrives som

$$\frac{\partial h_2}{\partial p_3}\frac{p_3}{h_2} = (\sigma_H - \sigma_U)\, e_{3H} + \sigma_U e_3$$

3.9. Krydspriselasticiteten mellem vare 2 og vare 1

Mens krydspriselasticiteten mellem vare 2 og vare 3 er en elasticitet mellem to varer i samme nest, er krydspriselasticiteten mellem vare 2 og vare 1 en elasticitet mellem to varer i forskellige nests. Vare 1 er i øverste nest mens vare 2 er nederste. Definitionen af denne krydspriselasticitet er

$$\frac{\frac{\partial c_2}{c_2}}{\frac{\partial p_1}{p_1}} = \frac{\partial c_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{c_2} =$$

$$(\sigma_U - 1)\,\beta_1^{\sigma_U}\left(\frac{p_1}{P_U}\right)^{1-\sigma_U} = (\sigma_U - 1)\, e_1$$

hvor

$$e_1 = \frac{p_1 c_1}{M} = \beta_1^{\sigma_U}\left(\frac{p_1}{P_U}\right)^{1-\sigma_U}$$

3.10. Den kompenserede krydspriselasticitet mellem vare 2 og vare 1

For sidste gang bruger vi den udledte sammenhæng mellem den kompenserede og den ukompenserede elasticitet jf. (1.9). I dette tilfælde fås

$$\frac{\partial h_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{h_2} = \frac{\partial c_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{c_2} + \frac{\partial c_2/c_2}{\partial M/(p_1 c_1)} \tag{3.3}$$

Vi finder som sædvanlig sidste led i udtrykket

$$\frac{\partial c_2/c_2}{\partial M/(p_1 c_1)} = \beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{-\sigma_H}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U}\frac{1}{P_U}\frac{p_1\beta_1^{\sigma_U}\left(\frac{p_1}{P_U}\right)^{-\sigma_U}\frac{M}{P_U}}{\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{-\sigma_H}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U}\frac{M}{P_U}} =$$

$$\beta_1^{\sigma_U}\left(\frac{p_1}{P_U}\right)^{1-\sigma_U}$$

Herved fås at den kompenserede krydspriselasticitet mellem vare 2 og vare 1 er

$$\frac{\partial h_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{h_2} = \sigma_U e_1$$

3.11. Krydspriselasticiteten mellem vare 1 og vare 2

Som et sidste tjek på systematikken finder vi krydspriselasticiten mellem vare 1 og vare 2, der er defineret som

$$\frac{\frac{\partial c_1}{c_1}}{\frac{\partial p_2}{p_2}} = \frac{\partial c_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{c_1}$$

hvor

$$\frac{\partial c_1}{\partial p_2} = \frac{\partial}{\partial p_2}\left(\beta_1^{\sigma_U}\left(\frac{p_1}{P_U\left(p_2\right)}\right)^{-\sigma_U}\frac{M}{P_U\left(p_2\right)}\right) = c_1\left(\left(\sigma_U - 1\right)\frac{P_U'}{P_U}\right)$$

Elasticiteten bliver derfor

$$\frac{\frac{\partial c_1}{c_1}}{\frac{\partial p_2}{p_2}} = \left(\sigma_U - 1\right)\frac{p_2 P_U'}{P_U} = \left(\sigma_U - 1\right)\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H} = \left(\sigma_U - 1\right)e_2$$

hvor

$$e_2 = \frac{p_2 c_2}{M} = \beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U}$$

Bemærk, at bortset fra definitionen af udgiftsandelen for vare 2 svarer dette resultat fuldstædingt til resultatet i en ikke nested CES funktion. Det skyldes selvfølgelig at vare 1 kun optræder i øverste nest.

4. Appendiks: Udledning af udtrykkene for priselasticiteter i en nested-CES

4.1. Efterspørgselsfunktionen efter en vare i nederste nest

Vi tager udgangspunkt i Roy's identitet

$$c_2(p_1, P_H, M) = \frac{-\partial S(p_1, P_H, M)}{\partial p_2} / \frac{\partial S(p_1, P_H, M)}{\partial M}$$

Vi finder først

$$\frac{-\partial S(p_1, P_H, M)}{\partial p_2} = \frac{-\partial}{\partial p_2}\left(\frac{M}{\left(\beta_1^{\sigma_U} p_1^{(1-\sigma_U)} + \beta_H^{\sigma_U}(P_H(p_2))^{(1-\sigma_U)}\right)^{\frac{1}{(1-\sigma_U)}}}\right) =$$

:

$$\frac{M}{P_U}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U}\frac{P_H'}{P_H}$$

hvor

$$\frac{P_H'}{P_H} = \beta_2^{\sigma_H}\frac{p_2^{1-\sigma_H}}{p_2\left(\beta_2^{\sigma_H} p_2^{1-\sigma_H} + \beta_3^{\sigma_H} p_3^{1-\sigma_H}\right)} = \frac{\beta_2^{\sigma_H}}{p_2}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H}$$

således at

$$\frac{-\partial S(p_1, P_H, M)}{\partial p_2} = \beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U}\frac{\beta_2^{\sigma_H}}{p_2}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H}\frac{M}{P_U}$$

Dernæst

$$\frac{\partial S(p_1, P_H, M)}{\partial M} = \frac{1}{P_U}$$

således at

$$c_2(p_1, P_H, M) = \beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{-\sigma_H}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U}\frac{M}{P_U}$$

4.2. Egenpriselasticiteten

Bevis: Først findes den afledte af efterspørgselsfunktionen

$$\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H(p_2)}\right)^{-\sigma_H}\left(\frac{P_H(p_2)}{P_U(p_2)}\right)^{-\sigma_U}\frac{M}{P_U(p_2)}\right) =$$

$$-\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{-\sigma_H}\sigma_H\frac{\frac{1}{P_H} - \frac{p_2}{P_H{}^2}P_H'}{p_2}P_H\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U}\frac{M}{P_U} -$$

$$\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{-\sigma_H}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U}\sigma_U\frac{\frac{P_H'}{P_U} - \frac{P_H}{P_U{}^2}P_U'}{P_H(p_2)}M -$$

$$\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{-\sigma_H}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U}\frac{M}{P_U^2}P_U'$$

Vi reducerer nu

$$\frac{c_2}{p_2}\left(-\sigma_H\left(\frac{1}{P_H}-\frac{p_2}{P_H^2}P_H'\right)P_H-p_2P_U\sigma_U\frac{\frac{P_H'}{P_U}-\frac{P_H}{P_U^2}P_U'}{P_H}-\frac{p_2P_U'}{P_U}\right)=$$

$$\frac{c_2}{p_2}\left(-\sigma_H+\frac{p_2P_H'}{P_H}\left(\sigma_H-\sigma_U\right)+\left(\sigma_U-1\right)\frac{P_U'p_2}{P_U}\right)$$

Tilbage er der så at udregne udtrykkene

$$P_H'=P_H\beta_2^{\sigma_H}\frac{p_2^{-\sigma_H}}{\left(\beta_2^{\sigma_H}p_2^{1-\sigma_H}+\beta_3^{\sigma_H}p_3^{1-\sigma_H}\right)}$$

$$\frac{p_2P_H'}{P_H}=\beta_2^{\sigma_H}\frac{p_2^{1-\sigma_H}}{\left(\beta_2^{\sigma_H}p_2^{1-\sigma_H}+\beta_3^{\sigma_H}p_3^{1-\sigma_H}\right)}=\beta_2^{\sigma_H}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H}$$

$$P_U'=\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{-\sigma_H}$$

$$\frac{p_2P_U'}{P_U}=\frac{p_2\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{-\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{-\sigma_H}}{P_U}$$

Vi kan nu indsætte i elasticiteten, hvorved fås

$$\left(-\sigma_H+\left(\sigma_H-\sigma_U\right)\beta_2^{\sigma_H}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H}+\left(\sigma_U-1\right)\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{1-\sigma_H}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U}\right) \tag{4.1}$$

4.3. Krydspriselasticiteten mellem vare 2 og vare 3

Bevis: Først findes den afledte af efterspørgselsfunktionen efter vare 2 mht. prisen på vare 3

$$\frac{\partial C_2}{\partial p_3}=\frac{\partial\left(\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H(p_3)}\right)^{-\sigma_H}\left(\frac{P_H(p_3)}{P_U(p_3)}\right)^{-\sigma_U}\frac{M}{P_U(p_3)}\right)}{\partial p_3}=$$

:

$$\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H\left(p_3\right)}\right)^{-\sigma_H}\frac{\sigma_H}{P_H\left(p_3\right)}P_H'\left(p_3\right)\left(\frac{P_H\left(p_3\right)}{P_U\left(p_3\right)}\right)^{-\sigma_U}\frac{M}{P_U\left(p_3\right)}-$$

$$\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H\left(p_3\right)}\right)^{-\sigma_H}\left(\frac{P_H\left(p_3\right)}{P_U\left(p_3\right)}\right)^{-\sigma_U}\sigma_U\frac{\frac{P_H'(p_3)}{P_U(p_3)}-\frac{P_H(p_3)}{P_U(p_3)^2}P_U'\left(p_3\right)}{P_H\left(p_3\right)}M-$$

$$\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H\left(p_3\right)}\right)^{-\sigma_H}\left(\frac{P_H\left(p_3\right)}{P_U\left(p_3\right)}\right)^{-\sigma_U}\frac{M}{P_U\left(p_3\right)^2}P_U'\left(p_3\right)$$

Udtrykket reduceres

$$c_2\left(\sigma_H\frac{P_H'}{P_H}-\sigma_U\frac{P_H'}{P_H}+\sigma_U\frac{P_U'}{P_U}-\frac{P_U'}{P_U}\right)$$

$$\frac{c_2}{p_3}\left(\left(\sigma_H-\sigma_U\right)\frac{p_3P_H'}{P_H}+\left(\sigma_U-1\right)\frac{p_3P_U'}{P_U}\right)$$

Indsættes udtrykkene (vi kan bruge resultaterne fra egenpriselasticteten)fås at krydsprise-lasticiteten kan skrives som

$$(\sigma_H - \sigma_U)\,\beta_3^{\sigma_H}\left(\frac{p_3}{P_H}\right)^{1-\sigma_H} + (\sigma_U - 1)\,\beta_3^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_3}{P_H}\right)^{1-\sigma_H}\left(\frac{P_H}{P_U}\right)^{1-\sigma_U}$$

4.4. Krydspriselasticiteten mellem vare 2 og vare 1

Bevis: Først findes den afledte af efterspørgselsfunktionen efter vare 2 mht. prisen på vare 1

$$\frac{\partial c_2}{\partial p_1} = \frac{\partial\left(\beta_2^{\sigma_H}\beta_H^{\sigma_U}\left(\frac{p_2}{P_H}\right)^{-\sigma_H}\left(\frac{P_H}{P_U(p_1)}\right)^{-\sigma_U}\frac{M}{P_U(p_1)}\right)}{\partial p_1} =$$

$$(\sigma_U - 1)\,c_2\frac{P_U'}{P_U}$$

Vi kan nu finde

$$P_U' = \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\left(\beta_1^{\sigma_U}p_1^{(1-\sigma_U)} + \beta_H^{\sigma_U}P_H^{(1-\sigma_U)}\right)^{\frac{1}{(1-\sigma_U)}}\right) = \beta_1^{\sigma_U}\left(\frac{p_1}{P_U}\right)^{-\sigma_U}$$

Elasticitetsudtrykket kan derfor skrives

$$(\sigma_U - 1)\,\frac{p_1 P_U'}{P_U} = (\sigma_U - 1)\,\beta_1^{\sigma_U}\left(\frac{p_1}{P_U}\right)^{1-\sigma_U}$$