

DREAM

Danish Research Institute for  
Economic Analysis and Modelling



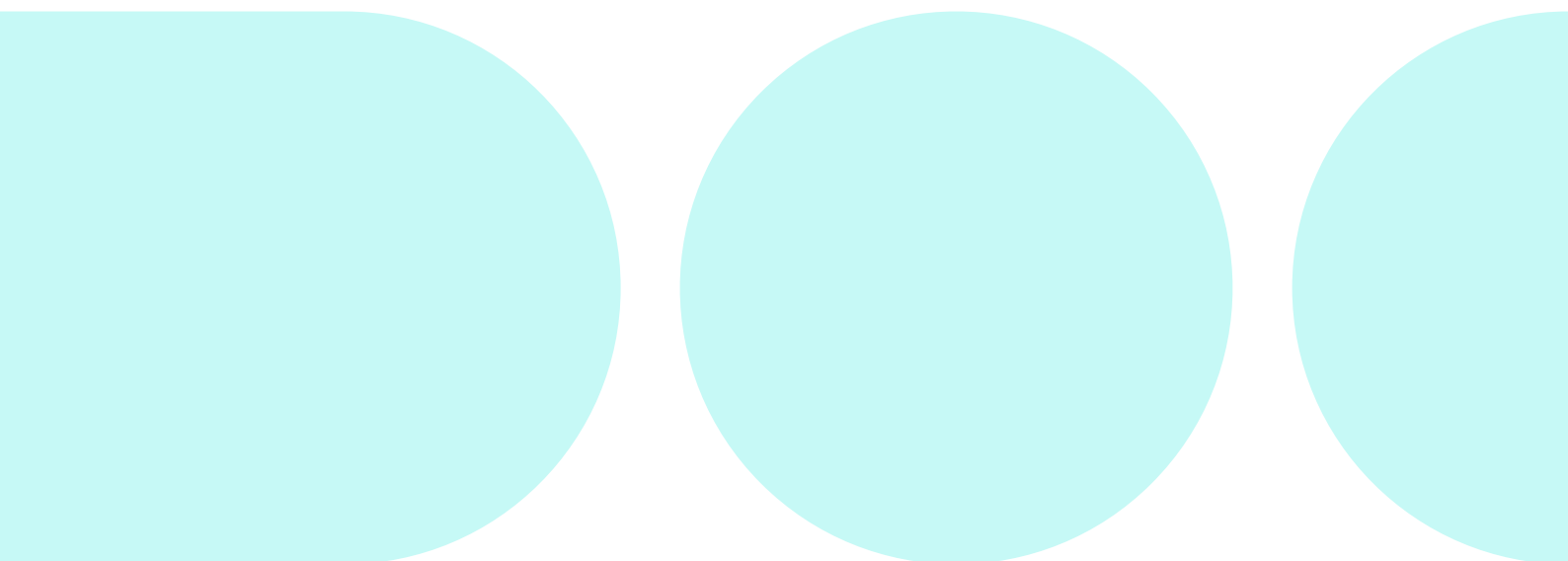
# Estimering af forbrugssystemet i MAKRO

Anders F. Kronborg og Christian S. Kastrup

Arbejdsrapport

24. marts 2021

[www.dreamgruppen.dk](http://www.dreamgruppen.dk)



# Resumé

I dette arbejdspapir estimeres substitutionselasticiteterne mellem de forskellige forbrugs-komponenter i MAKRO. Eftersom fordelingsparametrene er ukendte specificeres en proces, der er tidsvarierende. Dermed kan Kalman filteret anvendes til simultant at estimere elasticiteterne såvel som fordelingsparametrene, der udtrykker skift i præferencer for de enkelte forbrugskomponenter. Det antages, at skift i præferencer kan dekomponeres i en strukturel og en cyklisk del, hvor førstnævnte udtrykker langsigtede trends, der tillades at afvige fra en lineær trend. Sidstnævnte udtrykker kortsigtede fluktuationer, f.eks. som følger af konjunktuelle skift i økonomien. Dette setup medfører plausible parameterestimer og leder til en velspecificeret model.

# Indhold

1.	Indledning .....	1
2.	Nest struktur og modelspecifikation .....	2
3.	Resultater .....	5
4.	Opsummering .....	8
	Litteratur .....	8
A.	Anden tidsperiode .....	9
B.	Residualplots .....	11

# 1 Introduktion

I MAKRO opdeles det samlede forbrug i seks forskellige forbrugskomponenter: turisme ( $cTur$ ), tjenester ( $cTje$ ), varer ( $cVar$ ), energi ( $cEne$ ), biler ( $cBil$ ) og bolig ( $cBol$ ). Substitutionen mellem de forskellige forbrugskomponenter afgøres af en pris-effekt og en præference-effekt: Pris-effekten udtrykker skift i forbruget som følge af forskydninger i de relative priser mellem to forbrugskomponenter. Præference-effekten udtrykker derimod skift i forbruget pga. ændringer i præferencer, f.eks. øget efterspørgsel efter tjenester, der ikke udelukkende kan forklares ved skift i de relative priser. Hvor afgørende de to effekter er afhænger af substitutionselasticiteten mellem de forskellige forbrugskomponenter. At estimere denne elasticitet så korrekt som muligt er derfor vigtigt og har stor betydning for de modelmæssige egenskaber.

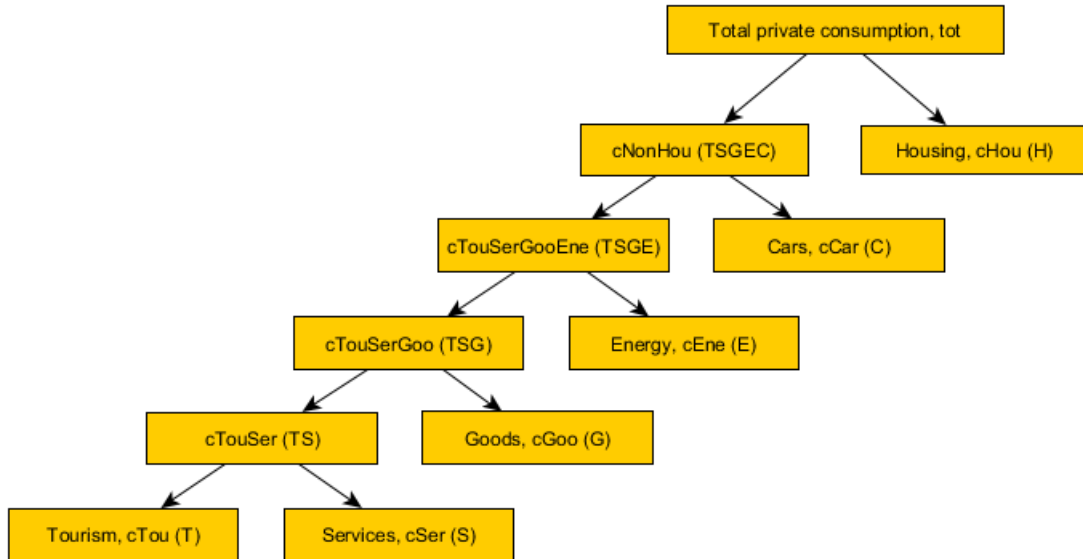
I dette papir er substitutionen mellem de forskellige forbrugskomponenter estimeret, med undtagelse af bolig, der estimeres særskilt. Vi har valgt tidsperioden 1983-2017 pga. et potentielt databrud og øget kvalitet af data. Denne tidsperiode svarer til, hvad vi anvender i fremskrivningen af strukturelle parametre i MAKRO. Der anvendes en nestet CES forbrugsfunktion, hvor der substitueres mellem to komponenter i hvert nest. Eftersom fordelingsparametrene, der udtrykker præferencer for den enkelte forbrugskomponent, er uobserverede, så forudsætter estimation at lave en antagelse om deres tidsmæssige udvikling. I dette papir følges metoden fra [1], idet Kalman filteret er anvendt til at estimere substitutionselasticiteten simultant med, at der gives et bud på præferenceudviklingen. Fordelingsparameteren dekomponeres i en strukturel og en kortsigtet del. Førstnævnte vil fange langsigtede trends i præferencer og den kortsigtede vil fange kortsigtede udsving, f.eks. øget bilkøb under en højkonjunktur. Vi finder, at dette setup medfører plausible estimater for substitutionselasticiteten samt medfører en velspecificeret model, baseret på en række økonometriske tests.

Strukturen er som følger: I Afsnit 2 præsenteres nest strukturen og den estimerede model. De metodemæssige overvejelser er også omtalt såvel som alternative specifikationer, der tidligere har været forsøgt. De estimerede elasticiteter og fordelingsparametre fremgår af Afsnit 3. Afsnit 4 opsummerer.

## 2 Nest struktur og model specifikation

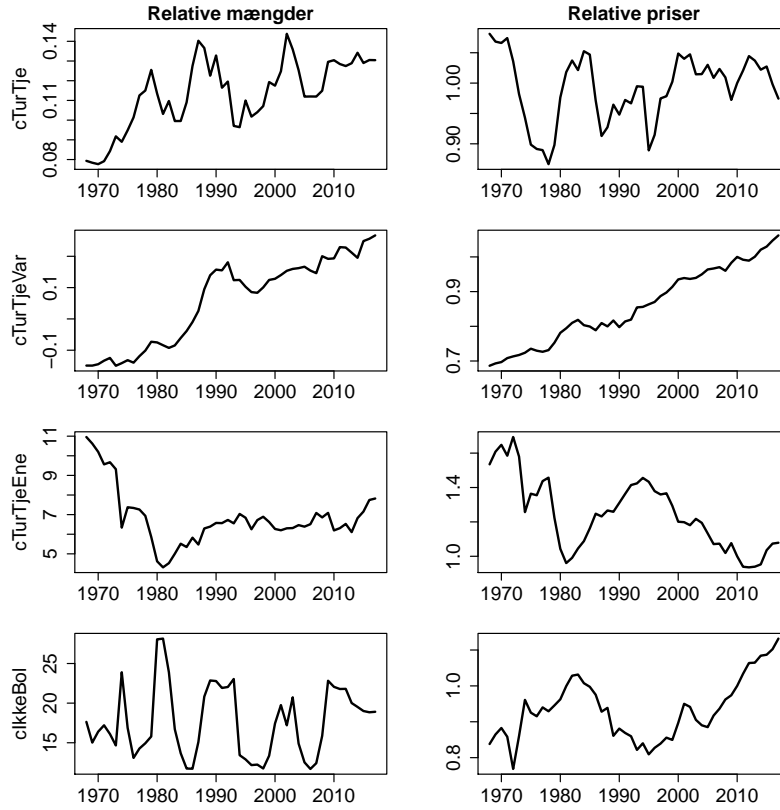
### 2.1 Nest struktur

Det aggregerede totale privatforbrug i MAKRO opdeles på de seks forskellige forbrugskomponenter omtalt i introduktionen og kan skrives som  $C_t P_t^C = \sum_a C_{at} P_{at}^C$ , hvor  $a = (cTur, cTje, cVar, cEne, cBil, cBol)$ . I det indeværende papir estimeres substitu-



Figur 1: Nest struktur

tionen mellem alle forbrugsgoder på nær bolig, som estimeres særskilt. Der anvendes en nestet CES-forbrugsfunktion, hvor der substitueres mellem to forbrugskomponenter ad gangen, da dette tillader for forskellige substitutionselasticiteter i alle nests. Den valgte nest struktur er vist i Figur 1. De enkelte nests er  $u = (cTurTje, cTurTjeVar, cTurTjeVarEne, cIkkeBol)$ , hvor f.eks.  $cTurTje$  angiver nestet bestående af turisme og tjenester. I nestene er prisen dannet som et Paasche prisindeks og den efterspurgte mængde er dannet konsistent med en antagelse om at den nastede værdi er lig med summen af værdien af de to forbrugsgoder i nestet. Dataserierne er fra MAKROs database og tidsperioden 1983-2017 er valgt, konsistent med datagrundlaget bag fremskrivninger af ARIMA'er i MAKRO. Denne tidsperiode er endvidere foretrukket pga. et strukturelt brud i energiforbruget i start 80'erne efter de to oliekriser. De anvendte dataserier er vist i Figur 2. Som et robusthedstjek har vi også foretaget estimation fra 1968, der vises i Appendix.



Figur 2: Relative mængder og priser ved den anvendte nest struktur. Begge vises som første input i nestet relativt til andet input, f.eks. turisme relativt til tjenester i første række.

## 2.2 Model specifikation

Nyttefunktionen er givet ved:

$$C_{cu,t} = \left[ \sum_j (\mu_{j,t} C_{j,t})^{\frac{\sigma_{cu}-1}{\sigma_{cu}}} \right]^{\frac{\sigma_{cu}}{\sigma_{cu}-1}}. \quad (1)$$

$j$  angiver de to forbrugskomponenter i de enkelte nests, f.eks.  $cTur$  og  $cTje$  i det nederste nest.  $t$  angiver tidsperioden.  $\mu_{j,t}$  er en fordelingsparameter og udtrykker præferencen for  $C_{j,t}$ , der kan være tidsvarierende. Substitutionselasticiteten er konstant og givet ved  $\sigma_{cu}$  i nest  $u$ . Hvis det antages at forbrugerne er omkostningsminimerende, kan følgende relative (log)efterspørgsel i det enkelte nest udledes på baggrund af (1)<sup>1</sup>:

$$s_{cu,t} = (\sigma_{cu} - 1) \mu_{cu,t} + (1 - \sigma_{cu}) p_{cu,t}, \quad (2)$$

<sup>1</sup>Vi estimerer den relative efterspørgsel frem for to ligninger simultant, da vi tidligere har oplevet problemer med tæt på perfekt multikolaritet mellem prisen på det ene forbrugsgode og det genererede prisindeks.

hvor  $s_{cu,t}$  er den relative budgetandel i logaritmer i nest u,<sup>2</sup>  $\mu_{cu,t}$  er den relative fordelingsparameter i logaritmer i nest u og  $p_{cu,t}$  er den relative pris i logaritmer i nest u.<sup>3</sup> Implikationerne af tidsmæssige skift i fordelingsparameteren afhænger af, om  $\sigma_{cu}$  er over eller under én: Når  $\sigma_{cu} < 1$  vil en stigning i  $\mu_{cu,t}$  (relativ stigning i præferencen for første forbrugskomponent i nestet) medføre et fald i  $s_{cu,t}$  (relativt fald i forbruget af første input i nestet). Når  $\sigma_{cu} > 1$  medfører en stigning i  $\mu_{cu,t}$  en stigning i  $s_{cu,t}$ . Dette understrejer vigtigheden af at estimere  $\mu_{cu,t}$  og  $\sigma_{cu}$  simultant, hvilket forudsætter, at der antages en proces for  $\mu_{cu,t}$ , da den er uobserveret for økonometrikeren. Med udgangspunkt i det anvendte data skal denne proces tillade for strukturelle skift, som det f.eks. ses i substitutionen mellem turisme-tjenester og varer, hvor den relative budgetandel er steget med en stort set lineær trend imod mindre relativt forbrug af varer. Derfor skal den valgte specifikation tillade for trends. I nestet mellem turisme-service-varer-energi og biler har den relative budgetandel være konstant på lang sigt, men indeholdende væsentlige kortsigtede/mellemlange udsving, potentielt korreleret med den økonomiske konjunktur. Derfor skal den valgte specifikation tillade for kortvarige udsving, der hverken kan forklares af ændringer i de relative priser eller strukturelle skift i præferencer. På baggrund af disse overvejelser dekomponerer vi  $\mu_{cu,t} = \mu_{cu,t}^{Strukturel} + \mu_{cu,t}^{Cyklisk}$ , hvor  $\mu_{cu,t}^{Strukturel}$  beskriver strukturelle udsving og  $\mu_{cu,t}^{Cyklisk}$  beskriver cykliske udsving og andre midlertidige udsving som ikke skyldes ændringer i priserne. Processerne er givet ved:

$$\Delta\mu_{cu,t}^{Strukturel} = \Delta\mu_{cu,t-1}^{Strukturel} + \eta_{cu,t}, \quad \mu_{cu,t}^{Cyklisk} = \sum_{i=1}^p \varphi_{cu,i} \mu_{cu,t-i}^{Cyklisk} + \varepsilon_{cu,t}, \quad (3)$$

hvor  $\eta_{cu,t} \sim N(0, \Sigma_{cu}^{\eta})$  og  $\varepsilon_{cu,t} \sim N(0, \Sigma_{cu}^{\varepsilon})$ . Antallet af lags i  $\mu_{cu,t}^{Cyklisk}$  er valgt ud fra et kriterie om ingen autokorrelation i  $\varepsilon_{cu,t}$ .  $\varphi_{cu,i}$  er restringeret til intervallet  $\pm 0.9$  for at opnå en stationær proces med en middelværdi på 0.<sup>4</sup> Den resulterende proces for  $\mu_{cu,t}$ , vil minde om en trend/cycle dekomponering kendt fra et HP-filter. Ved den valgte specifikation vil  $\mu_{cu,t}^{Strukturel}$  udtrykke strukturelle præferencemæssige skift mellem de to forbrugskomponenter, der potentielt afviger fra den klassiske antagelse om en lineær trend.<sup>5</sup>  $\mu_{cu,t}^{Cyklisk}$  afspejler cykliske eller kortsigtede ændringer i præferencer, potentielt

<sup>2</sup>Anvendelsen af budgetandele frem for relative mængder har den fordel, at det giver anledning til mindre estimationsfejl, hvis der er korrelerede målefejl på både højre og venstresiden.

<sup>3</sup>I det første nest vil de f.eks. være  $s_{cTurTje} = \log\left(\frac{P_{cTur}^C}{P_{cTje}^C} \frac{C_{cTur}^C}{C_{cTje}^C}\right)$ ,  $\mu_{cTurTje} = \log\left(\frac{\mu_{cTur}}{\mu_{cTje}}\right)$  og  $p_{cTurTje} = \log\left(\frac{P_{cTur}^C}{P_{cTje}^C}\right)$ .

<sup>4</sup>Ved at lade  $\varphi_{cu,i}$  variere frit estimeres  $\mu_{cu,t}^{Strukturel}$  oftest til en Random Walk. Dette er et velkendt problem: en Random Walk er en god beskrivelse af mange tidsserier og medfører, at der lægges mindre vægt på priserne. Dette finder vi ikke plausibelt ud fra et økonomisk synspunkt.

<sup>5</sup>Vores metode nester dog den klassiske lineær trend antagelse, ofte anvendt i litteraturen til at estimere efterspørgsel i CES funktioner.

opstået pga. skift i konjunkturer. Hvor trægt  $\mu_{cu,t}^{Strukturel}$  bevæger sig afhænger af det relative inverse støj-signal forhold,  $\lambda \equiv \frac{\Sigma_{cu}^e}{\Sigma_{cu}}$ .  $\lambda \rightarrow \infty$  svarer til en lineær trend antagelse og  $\lambda \rightarrow 0$  svarer til, at alle ændringer i relative budgetandele skyldes strukturelle skift i præferencer. Vi anvender proceduren beskrevet i [1], hvor Kalman filteret anvendes: først estimeres  $\lambda$  frit med en rekursiv anvendelse af maximum likelihood estimatoren og efterfølgende kalibreres den for et grid af værdier i intervallet  $\lambda \in [50; 1000]$ . Den værdi, der maksimerer likelihood og som er velspecificeret (ingen autokorrelation og NIS-test overholdt),<sup>6</sup> vælges.

Flere forskellige processer for  $\mu_{cu,t}$  har været afprøvet, heriblandt en Random Walk antagelse, der dog viste sig at resultere i en ikke-velspecificeret model i mange estimationer (herunder problemer med residual autokorrelation). Vi har desuden estimeret modeller på fejlkorrektionsform i stil med [1], hvilket generelt resulterer i velspecificerede modeller. Parameterestimererne var dog usikkert bestemt og ofte af uplausibel størrelsesorden. Endvidere var likelihood værdien også væsentligt lavere end tilsvarende for den statistiske model.

### 3 Resultater

I dette afsnit fremgår de estimerede CES-elasticiteter og fordelingsparametre ved anvendelse af state space modellen bestående af (2)-(3). Resultaterne vises for tidsperioden 1983-2017 og resultaterne for tidsperioden 1968-2017 fremgår af Appendix A. Substitutionselasticiteten i det første nest mellem tjenester og turisme estimeres til 1.25 (Tabel 1). Tjenester og turisme er dermed substitutter, da elasticiteten er større end én. Omvendt er turisme-tjeneste og varer komplementær, da elasticiteten er marginalt mindre end 1 (0,94, Tabel 1). Elasticiteten overfor energiforbrug er relativ lav på 0.26. Vi har ved andre specifikationer estimeret den til at være lav og endda til 0 når hele tidsperioden anvendes, hvormed vi anser estimatet som værende kvalitativt robust. Slutteligt er elasticiteten overfor biler på 1.04 og meget tæt på Cobb-Douglas. Den er dog bestemt med stor usikkerhed og er ved andre specifikationer estimeret til at være lavere (omkring 0,2-0,5, resultater ikke vist her). På trods af at standardfejlene på parametrene er relativt høje er alle elasticiteter signifikant større end 0. Den høje usikkerhed bag estimererne skyldes primært usikkerheden bag trend specifikationen. Hvis den estimerede proces for præferencerne i stedet antages som korrekt vil standardafvigelse være væsentligt mindre. Det er dog kun for energi at elasticiteten er signifikant forskellig fra én, hvilket kan være et argument for at anvende en Cobb-Douglas antagelse i de andre nests, hvis det har andre modelmæssige fordele.

---

<sup>6</sup>NIS-testen er en test for, om residualerne er velkalibrerede og er ofte anvendt i Kalman filter litteraturen.



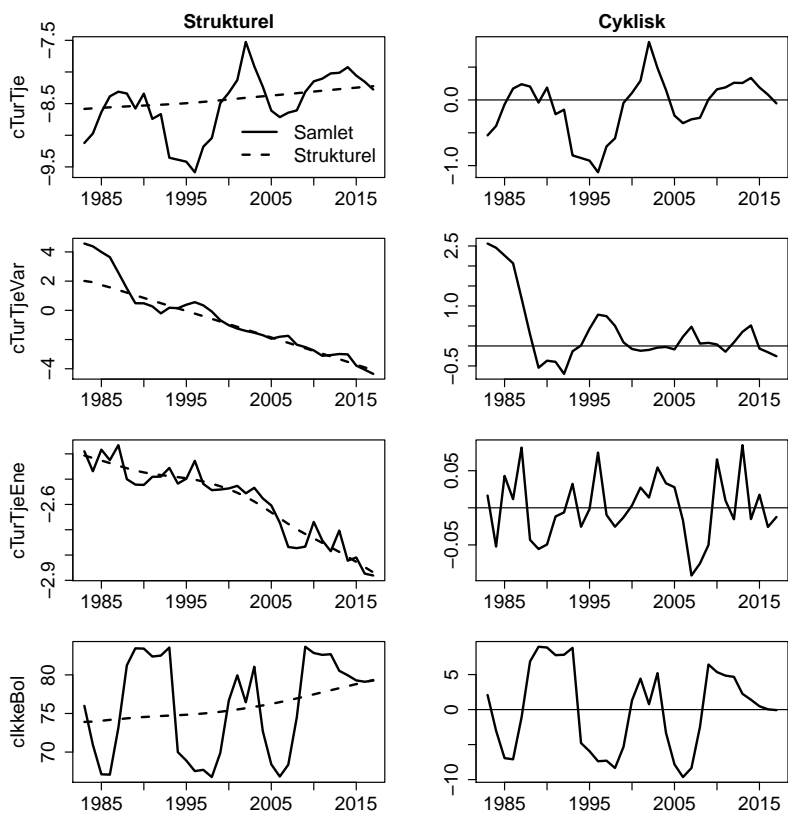
	cTurTje	cTurTjeVar	cTurTjeEne	clkkeBol
$\sigma$	1.25 (0.34)	0.94 (0.33)	0.26 (0.08)	1.04 (0.48)
$\varphi_1$	0.86 (0.19)	0.89 (0.13)	NA (NA)	0.89 (0.19)
$\varphi_2$	NA (NA)	-0.13 (0.07)	NA (NA)	-0.21 (0.15)
nlags	1	2	0	2
Observationer	35	35	35	35
Likelihood	64.92	102.81	81.47	37.83
$\lambda$	950	1000	100	800
Autokorrelation	[ 0.47 ]	[ 0.22 ]	[ 0.39 ]	[ 0.60 ]
Heteroskedasticitet	[ 0.66 ]	[ 0.03 ]	[ 0.25 ]	[ 0.08 ]
Normalitet	[ 0.27 ]	[ 0.40 ]	[ 0.86 ]	[ 0.09 ]
NIS	0.89	0.86	0.84	0.87

Tabel 1: Estimerede resultater. Termer i parentes er bootstrappede standardfejl og klammer er p-værdier. nlags angiver antallet af autoregressive lags,  $\varphi_{cu,i}$ . Den kritiske værdi for NIS-testen er [0,68;1,37] på et 10% signifikansniveau.

For alle fire nests opnås en model, hvoraf der er ingen autokorrelation i residualerne på et 10% signifikansniveau og NIS-testen for filter misspecifikation er også inden for konfidensintervallet på et 10% signifikansniveau. Dette bekræftes også af et residual-samt autokorrelationsplot i Appendix A, hvor der ikke ser ud til at være væsentlige outliers eller autokorrelation i residualerne. Det kan dog tyde på, at der er heteroskedastiske fejllid i enkelte af nestene (se testen for heteroskedasticitet i Tabel 1). Heteroskedasticitet invaliderer den anvendte fixed-design bootstrapping procedure og de bootstrappede standardfejl kan derfor indeholde målefejl, hvilket en blok-bootstrapping procedure potentielt kan afhjælpe.<sup>7</sup> For nu ligger vores primære interesse dog i punktestimaterne, men en anden bootstrapping procedure kunne være interessant at afprøve en gang i fremtiden som et robusthedstjek.

I ingen af nestene har den frie estimation af det inverse støj-signal forhold været foretrukket (se Tabel 1, hvor den foretrukne værdi af  $\lambda$  er en af de kalibrerede værdier i griddet). Dette viser, at en kalibrering af parameteren til en bestemt værdi ofte kan være at foretrække, da det giver en mere velspecificeret model og højere likelihood. Den foretrukne værdi for  $\lambda$  er relativt høj i alle nests på nær turisme-tjeneste-varer overfor energi nestet. Dette medfører, at den underliggende proces for  $\mu_{cu,t}^{Strukturel}$  er tæt på en lineær trend med gradvis afbøjning, hvilket også ses af Figur 3. Kort- og mellemsigtede fluktuationer (op til ca. 5 år) fanges i stedet af den cykliske komponent, der følger en

<sup>7</sup>Vi har ikke afprøvet denne bootstrapping procedure i vores estimationer endnu. Ideen vil være at sample residualerne med tilbagelægning i blokke frem for enkeltvist. På den måde bibeholdes noget af den tidsmæssige struktur i data.



Figur 3: Dekomponering af fordelingsparameteren,  $\mu_{cu,t}$ , i en strukturel,  $\mu_{cu,t}^{Strukturel}$ , og en cyklisk,  $\mu_{cu,t}^{Cyklisk}$ , komponent.

AR(1) proces i det første nest og en AR(2) proces i det andet og sidste nest. I nestet overfor energi har ingen lags været nødvendige for at sikre, at der ikke er autokorrelation i residualerne til stede. Dette hænger godt sammen med den lavere værdi af  $\lambda$ , som tillader den strukturelle del at fange flere af fluktuationerne på mellemlang sigt. I alle tilfælde kan det konkluderes, at den cykliske del ser ud til at være tilbagevendende til en middelværdi på 0 og en stationær proces.

## 4 Opsummering

Forbrugssystemet i MAKRO er estimeret ved at anvende Kalman filteret, analogt til estimeringen af substitutionselasticiteterne i produktionsfunktionerne i MAKRO. Tidsperioden 1983-2017 er anvendt samt data fra MAKROs database. Der anvendes en statistisk regression, hvor fordelingsparameteren er dekomponeret i en strukturel I(2)-proces og en cyklisk AR(p) proces. De estimerede elasticiteter er af plausibel størrelsesorden men dog bestemt med en vis usikkerhed, hvilket ikke er anderledes fra andre estimationer med usikkerhed om trendspecifikationen. Alle foretrukne estimationer er velspecificerede og lever op til en række af økonometriske tests.

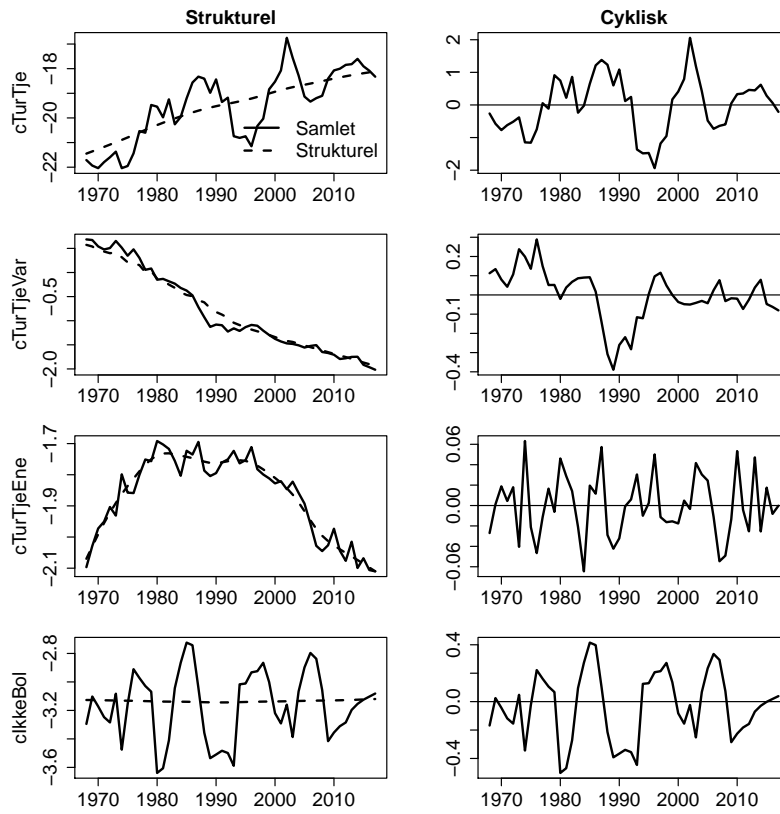
## Litteratur

- [1] A. F. Kronborg, C. S. Kastrop, and P. P. Stephensen. Estimating the Constant Elasticity of Substitution when Technical Change is Time-Varying: A Kalman Filtering Approach. Working paper, DREAM, November 2019.

## A Anden tidsperiode

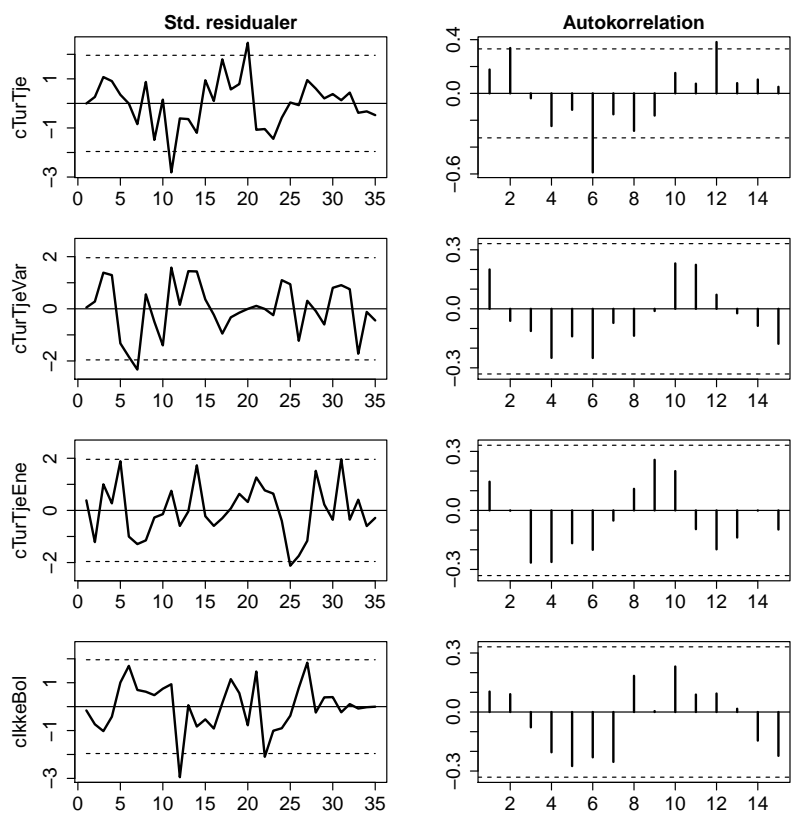
	cTurTje	cTurTjeVar	cTurTjeEne	clkkeBol
$\sigma$	1.11 (0.29)	0.71 (0.26)	0.00 (0.06)	0.06 (0.40)
$\varphi_1$	0.89 (0.27)	0.89 (0.08)	NA (NA)	0.88 (0.19)
$\varphi_2$	NA (NA)	0.09 (0.08)	NA (NA)	NA (NA)
$\varphi_2$	NA (NA)	0.01 (0.07)	NA (NA)	NA (NA)
nlags	1	3	0	1
Observationer	50	50	50	50
Likelihood	98.36	148.61	120.24	50.40
$\lambda$	262	300	22	1015
Autokorrelation	[ 0.87 ]	[ 0.15 ]	[ 0.80 ]	[ 0.44 ]
Heteroskedasticitet	[ 0.95 ]	[ 0.61 ]	[ 0.77 ]	[ 0.83 ]
Normalitet	[ 0.62 ]	[ 0.98 ]	[ 0.67 ]	[ 0.11 ]
NIS	0.90	0.85	0.81	0.95

Tabel 2: Estimerede resultater for tidsperioden 1968-2017. Termer i parentes er bootstrappede standardfejl og klammer er p-værdier. nlags angiver antallet af autoregressive lags,  $\varphi_{cu,i}$ . Den kritiske værdi for NIS-testen er [0,68;1,37] på et 10% signifikansniveau.



Figur 4: Dekomponering af fordelingsparameteren,  $\mu_{cu,t}$ , i en strukturel,  $\mu_{cu,t}^{Strukturel}$ , og en cyklisk,  $\mu_{cu,t}^{Cyklisk}$ , komponent. tidsperioden er 1968-2017.

## B Residualplots



Figur 5: Standardiserede residualer og autokorrelationsplot.